Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса, 2024–2025 учебный год

1. Пете, Васе и Толе выдали одинаковые наборы из пяти карточек: 1, 4, 5, 6, 13. Каждый случайно выбирает одну из своих карточек и выкладывает на стол. Найдите вероятность того, что произведение чисел на карточках — простое число.

Ответ. $\dfrac{6}{125}$.

Решение. Простое число может являться произведением натуральных чисел только в том случае, если один из множителей — простое число, а остальные множители равны 1. Поэтому соответствующее событие произойдёт тогда и только тогда, когда числа у Пети, Васи и Толи соответственно равны $(5,1,1)$, $(1,5,1)$, $(1,1,5)$, $(13,1,1)$, $(1,13,1)$, $(1,1,13)$ — т.е. в одном из 6 *благоприятных исходов*.

Общее количество исходов найдём так: Петя может выбрать любую из 5 карточек, для каждого из этих вариантов Вася может выбрать тоже любую из 5 карточек (таким образом, пока пару карточек можно выбрать $5 \cdot 5 = 25$ способами), а для каждого из этих способов Толя может выбрать свою карточку тоже 5 способами. Таким образом, три карточки можно выбрать $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ способами — это и есть общее число исходов. Вероятность нужного события найдём как отношение количества благоприятных исходов к общему количеству исходов, то есть $\dfrac{6}{125}$.

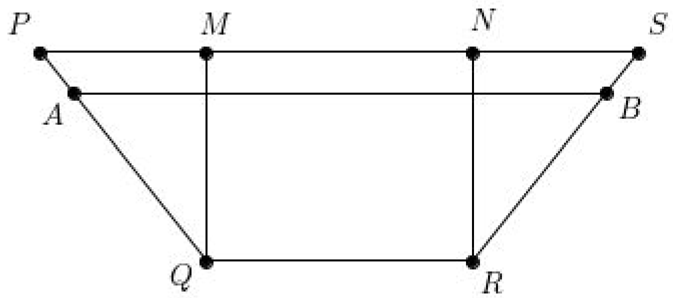
2. Если длину прямоугольного поля увеличить на 20 м, а ширину увеличить на 8 м, то его площадь увеличится на 9280 м^2. На сколько уменьшится площадь поля, если его длину уменьшить на 20 м, а ширину уменьшить на 8 м? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ. 8960. **Решение.** Пусть исходная длина поля равна x метров, а ширина равна y метров. Первоначальная площадь поля равна xy м^2. После увеличения длины и ширины, как в условии задачи, площадь поля стала бы равна $(x+20)(y+8)$ м^2. То есть площадь увеличилась на $(x+20)(y+8)-xy = 8x+20y+160$ м^2, что по условию задачи равно 9280 м^2, откуда $8x+20y = 9280-160 = 9120$ м^2. При уменьшении длины и ширины площадь поля стала бы равна $(x-20)(y-8)$, то есть площадь уменьшилась бы на $xy-(x-20)(y-8) = 8x+20y-160 = 9120-160 = 8960$ м^2.

3. На сторонах правильного семиугольника со стороной 2 отмечены две точки A и B. Чему может быть равна длина отрезка AB?
a) 1; b) 4; c) 7; d) 15.

Ответ. a), b).

Решение. a) Достаточно выбрать две точки на одной стороне на расстоянии 1 друг от друга.
b) Пусть P, Q, R, S — четыре последовательные вершины семиугольника. Тогда $PQRS$ — равнобокая трапеция. Опустим из Q и R перпендикуляры QM и RN на основание PS.



Заметим, что $\angle PQM = \frac{180° \cdot 5}{7} - 90° > 30°$, откуда $PM > PQ \sin 30° = 1$. Тогда на отрезке PQ найдётся такая точка A, что перпендикуляр из A на MQ будет равен 1. Тогда продолжение этого перпендикуляра до пересечения с RS будет равен $1+2+1=4$, что и требовалось.
c) Заметим, что от точки A до точки B можно «добраться по границе» 7-угольника, пройдя расстояние (по границе) не более 7: весь периметр 7-угольника равен 14, т.е. хотя бы один из путей будет не более 7. Но тогда длина отрезка AB будет строго меньше 7.
d) Аналогично пункту c).

4. Какой остаток при делении на 32 даёт число $2^4 \cdot 5^6 \cdot 11^{10} \cdot 17^{17}$?

Ответ. 16. **Решение.** Число из условия задачи можно обозначить как N. Оно записывается в виде $N = 32k + r$, где k и r — соответственно неполное частное и остаток при делении N на 32 ($0 \leqslant r < 32$).

N делится на 16, так как в разложении N на простые множители есть $2^4 = 16$, поэтому $32k + r$ делится на 16, откуда (так как $32k$ делится на 32, а значит и на 16) r делится на 16, поэтому равно или 0, или 16 (только они делятся на 16 в диапазоне $0 \leqslant r < 32$). Если $r = 0$, то $N = 32k$, поэтому должно делиться на 32, но это неверно (в его разложении на простые множители двойка входит только в степени 4, поэтому N не делится на $2^5 = 32$). Следовательно, $r = 16$ (единственный оставшийся возможный вариант).

5. Каждое из чисел от 1 до 3491 покрашено в один из k цветов (каждый цвет встречается). Оказалось, что для каждого цвета количество чисел этого цвета равно наименьшему числу этого цвета. При каком наибольшем k это возможно?

Ответ. 83.

Решение. Обведём в кружочек наименьшее число каждого цвета. Наименьшее из обведённых чисел не меньше 1, следующее по величине — не меньше 2, следующее — не меньше 3, и т.д., последнее обведённое число не менее k. Общее количество покрашенных чисел по условию задачи равно сумме обведённых чисел, поэтому не меньше $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, но по условию покрашенных чисел ровно 3491. Отсюда $3491 \geqslant \dfrac{k(k+1)}{2}$ — несложно убедиться, что это неравенство выполняется при $k \leqslant 83$.

Для $k = 83$ можно привести пример раскраски чисел: покрасим каждое из чисел от 1 до 82 в свой уникальный цвет (сами цвета также будем соответственно называть: 1-й, 2-й, 3-й, …, 82-й), а числа 88, 89, 90, 91, …, 175 покрасим в 83-й цвет. Далее во 2-й цвет покрасим ещё одно из пока не покрашенных чисел, в 3-й цвет — ещё два числа, и так далее, в 82-й цвет — ещё 81 число. В результате в 1-й цвет покрашено только число 1, во 2-й цвет — два числа, из которых наименьшее равно 2, в 3-й цвет — три числа, из которых наименьшее равно 3, и так далее, а вот в 83-й цвет покрашено 88 чисел, из которых наименьшее равно 88. Всего покрашены

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 82 + 88 = \frac{82 \cdot 83}{2} + 88 = 3491$$

чисел, то есть все числа из набора.

Таким образом, для 83 цветов удалось предъявить пример, а большего количества цветов, как ранее доказано, быть не может.

6. Жора решил систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Для каждого решения Жора посчитал, чему равно $(x + y)^2$. Чему равна сумма всех чисел, посчитанных Жорой?

Ответ. 116.

Решение. Сложим первое равенство с удвоенным вторым и выделим в левой части полный квадрат:

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = 20 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 29,$$

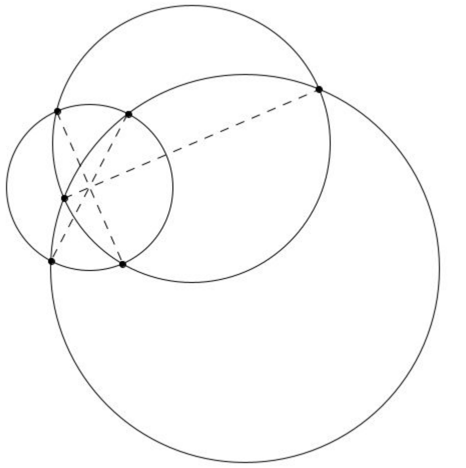
откуда $x + y = \pm\sqrt{29}$ (два значения). Отсюда $y = \pm\sqrt{29} - x$. Подставим это во второе уравнение системы, получим $x \cdot \left(\pm\sqrt{29} - x\right) = \dfrac{9}{2}$. Это преобразуется к квадратному уравнению $x^2 \mp \sqrt{29}x + \dfrac{9}{2} = 0$, дискриминант которого равен $29 - 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{9}{2}$, то есть положителен. Таким образом, это уравнение имеет по два корня для каждого из вариантов выбора знаков при $\sqrt{29}$, то есть всего четыре корня, каждому из них соответствует решение (x, y) исходной системы.

Для каждого из этих четырёх решений Жора находил $(x+y)^2$, что равно $(x^2+y^2)+2 \cdot xy = 20+2 \cdot \frac{9}{2} = 29$. Поэтому для четырёх решений Жора получит общую сумму $4 \cdot 29 = 116$.

Комментарий. Каждому решению, которое нашёл Жора, соответствует точка пересечения окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 20$, с одной из двух ветвей гиперболы, заданной уравнением $xy = \frac{9}{2}$ (или $y = \frac{9/2}{x}$). Каждая из этих ветвей гиперболы имеет с окружностью две точки пересечения (для этого можно проверить, что ближайшая к началу координат точка каждой из этих ветвей — т.е. точки $\left(\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ и

$\left(-\sqrt{\frac{9}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ — находится внутри окружности, так как расстояние до начала координат меньше $\sqrt{20}$). Всего получаем четыре точки пересечения, что соответствует четырём решениям системы.

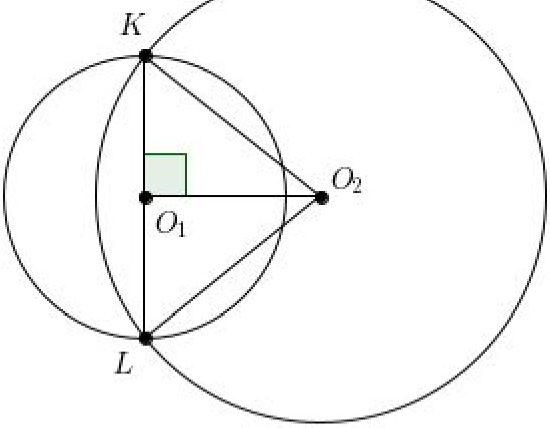
7. Три окружности радиусами 3, 5, 7 расположены так, что общая хорда пересечения любых двух окружностей является диаметром меньшей из них.
1) Найдите квадраты длин сторон треугольника, образованного центрами этих окружностей.
2) Найдите квадрат площади треугольника, образованного центрами этих окружностей.



Ответ. 1) 16, 24, 40; 2) 96.

Решение. 1) Для начала докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть окружности радиусами $r < R$ расположены так, что их общая хорда является диаметром меньшей из них. Тогда длина отрезка между их центрами равняется $\sqrt{R^2 - r^2}$.



Действительно, хорошо известно, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров. На чертеже KL — общая хорда, проходящая через центр первой окружности O_1, перпендикулярная отрезку O_1O_2. Тогда утверждение леммы — это просто теорема Пифагора для треугольника O_1O_2L.

Применяя лемму к каждой из пар окружностей, получаем ответ.

Комментарий. Теперь, зная длины сторон, с использованием формулы Герона можно получить площадь треугольника. Однако такой путь может быть сопряжён с громоздкими выкладками. Предложим здесь другой путь решения.

2) Заметим, что по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонам, квадраты которых равны 16, 24 и 40 — прямоугольный (ведь $16 + 24 = 40$). Поэтому квадрат площади — это четверть произведения квадратов длин катетов, т.е. $16 \cdot 24/4 = 96$.

8. Пусть $n > 2024$ — натуральное число. На доске написаны натуральные числа от 2024 до n. За одну операцию робот берёт два наибольших числа на доске и заменяет их на их разность, тем самым уменьшая количество чисел на доске. Через некоторое время на доске останется только одно число. Сколько существует натуральных $n < 10\,000$, для которых это число будет равно 0?

Ответ. 2976.

Решение. Если n чётно, то после $\frac{n-2024}{2}$ операций мы получим 2024 и $\frac{n-2024}{2}$ единиц. Чтобы в итоге осталось число 0, единиц должно быть чётно и хотя бы 2024. Значит, $n - 2024$ (а с ним и n) делится на 4 и $\frac{n-2024}{2} \geqslant 2024$, $n \geqslant 6072$. Таким чисел, больших 2024 и меньших 10000 всего 982 (от $1518 \cdot 4 = 6072$ до $2499 \cdot 4$).

Если n нечётно, то после $\frac{n-2023}{2}$ операций мы получим $\frac{n-2023}{2}$ единиц. Чтобы остался 0 единиц должно быть чётное число. Следовательно, $n - 2023$ делится на 4, т.е. $n \equiv 3 \pmod 4$. Таких чисел, больших 2024 и меньших 10000, всего 1994 (от $506 \cdot 4 + 3$ до $2499 \cdot 4 + 3$).

Итого, ответ $982 + 1994 = 2976$.