Условия и решения задач

9 класс

9.6. Саша взял кусок нити. Он сложил её пополам, затем ещё раз пополам, и так 10 раз. Затем он взял ножницы и разрезал полученную конструкцию в одном месте (таким образом, он перерезал нить в 1024 местах). В итоге нить распалась на куски. Оказалось, что длины этих кусков принимают лишь два различных значения, наименьшее из которых равно 10 см. Найдите все возможные значения длины исходной нити.

(*А. Храбров*)

Ответ. 15360 см или 20480 см.

Решение. Полученная до разрезания конструкция состоит из 1024 отрезков нити, которые нить проходит поочерёдно слева направо и справа налево (пусть оба конца нити находятся слева). Тогда, если разрез проведён в a см от левого края и в b см от правого края, то длины полученных кусков нити равны a, $2a$ и $2b$. Поскольку этих длин всего две, то $2b$ совпадает либо с a, либо с $2a$, а наименьший кусок равен $a = 10$ см. Значит, $b = 5$ см или $b = 10$ см, а общая длина нити, равная $1024(a + b)$, тогда может принимать значения $1024 \cdot 15 = 15360$ см или $1024 \cdot 20 = 20480$ см.

Комментарий. Один из двух ответов упущен — 4 балла.

9.7. Пусть на доске написаны несколько целых чисел (некоторые из которых могут быть равными). Скажем, что эти числа образуют *удачный набор*, если их нельзя разбить на две непустые группы так, чтобы произведение суммы чисел в одной группе и суммы чисел в другой было положительным. Учитель написал на доске несколько целых чисел. Докажите, что дети могут дописать к имеющимся ещё ровно одно целое число так, чтобы полученный набор оказался удачным. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть сумма всех чисел, выписанных учителем, равна S; тогда детям достаточно дописать число $-S$. Действительно, после этого сумма всех чисел окажется равной нулю, а значит, при разбиении их на две группы суммы в группах будут противоположными друг другу, то есть их произведение будет неположительным.

Замечание. Вместо числа $-S$ дети могут дописать $1-S$ или $-1-S$.

Комментарий. Указано, что надо дописать такое число, что сумма всех чисел на доске станет равной нулю — 7 баллов.

9.8. На столе по кругу выложили 100 двухрублёвых и N пятирублёвых монет в некотором порядке. Известно, что выбрав из круга несколько подряд идущих монет, невозможно получить сумму ровно в 52 рубля. Найдите наибольшее возможное значение числа N. (*А. Смолин*)

Ответ. $N = 450$.

Решение. Покажем, как выложить 100 двухрублёвых и 450 пятирублёвых монет по кругу так, чтобы выполнялось условие задачи. Пронумеруем места по кругу по часовой стрелке числами от 1 до 550 и выложим двухрублёвые монеты на места, номера которых кратны 11 (т. е. $11, 22, \ldots$), и на места, номера которых дают остаток 5 при делении на 11 (т. е. $5, 16, \ldots$); на остальные места выложим пятирублёвые монеты. Тогда между каждой парой соседних двухрублёвых монет находятся 4 или 5 пятирублёвых монет, причём эти количества чередуются.

Рассмотрим некоторый набор подряд идущих монет; покажем, что они не дают сумму в 52 рубля. Если среди них нет двухрублёвых, то сумма делится на 5, а 52 не делится на 5. Если среди них ровно две двухрублёвых, сумма даёт остаток 4 при делении на 5, то есть тоже не равна 52. Если двухрублёвая монета одна, вместе с ней в наборе может быть не более $4+5=9$ пятирублёвых, то есть сумма не превосходит $2+9\cdot 5 = 47$ рублей. Наконец, пусть двухрублёвых монет в наборе хотя бы три, рассмотрим три двухрублёвых монеты, лежащих в наборе подряд. Между ними есть 9 пятирублёвых; суммарное достоинство этих монет уже равно $3\cdot 2+9\cdot 5 = 51$ рублю. Значит, набрана сумма либо в 51 рубль, либо хотя бы в $51+2 = 53$ рубля. Таким образом, полученная раскладка удовлетворяет условию.

Осталось показать, что при любой раскладке 100 двухрублёвых и не менее 451 пятирублёвых монет обязательно можно выбрать несколько монет подряд с суммарным достоинством 52 рубля. Пронумеруем двухрублёвые монеты числами $1, 2, \ldots, 100$ в порядке их расположения по часовой стрелке. Выделим 50 двухрублёвых монет с нечётными номерами. Между выделенными монетами есть 50 промежутков; в одном из них окажется не менее 10 пятирублёвых монет, иначе общее количество пятирублёвых монет не превосходило бы $9 \cdot 50 = 450$. Итак, мы нашли промежуток, в котором есть ровно одна двухрублёвая монета C и хотя бы 10 пятирублёвых; тогда можно взять C и 10 пятирублёвых монет так, чтобы они лежали подряд. Тогда и наберётся сумма ровно в 52 рубля.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Верный пример, показывающий, что при $N = 450$ требуемая раскладка возможна, **с доказательством**, что она подходит — 2 балла.

Только пример без обоснования — 1 балл.

Только *оценка*, то есть доказательство того, что $N \leqslant 450$ — 5 баллов.

Если в оценке доказано лишь, что с двух сторон от одной двухрублёвой монеты лежит не более 9 пятирублёвых — 3 балла за оценку.

Баллы за пример и оценку складываются.

9.9. На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л? (*И. Богданов*)

Ответ. При $\alpha \leqslant 1/17$.

Решение. Предположим, что количество воды в любых двух сосуждах отличается больше, чем на α л. Пусть $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_{11}$ — количества воды в сосудах; назовём *индексом* сосуда его номер в этом ряду. Заметим, что $k_0 \geqslant 0$, и по нашему предположению $k_i > \alpha + k_{i-1}$; отсюда получается, что $k_o > \alpha i$ при $i \geqslant 1$.

Сумма всех индексов равна $0 + 1 + \ldots + 11 = 66$, поэтому найдётся ряд, сумма индексов в котором не меньше, чем 17. Из неравенств выше получаем, что суммарное количество воды в этом ряду больше, чем 17α, откуда $\alpha < 1/17$. Итак, при всех значениях $\alpha \geqslant 1/17$ утверждать требуемое можно.

С другой стороны, если распределить воду по рядам как
$$\frac{13}{17}+\frac{1}{17}+\frac{3}{17}, \quad \frac{10}{17}+\frac{2}{17}+\frac{5}{17}, \quad \frac{9}{17}+\frac{8}{17}+0, \quad \frac{7}{17}+\frac{6}{17}+\frac{4}{17}.$$
то количества воды в любых двух сосудах будут отличаться минимум на $1/17$ л. Поэтому при всеъ $\alpha < 1/17$ утверждать требуемое нельзя.

Замечание. Есть и другие примеры, в которых все количества отличаются не менее чем на $1/17$ л. Однако во всех таких примерах все количества воды в сосудах имеют вид $a/17$ л, где a — целое число.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример, показывающий, что все α, меньшие $1/17$, не подходят — 2 балла.

Только оценка $\alpha \leqslant 1/17$ — 4 балла.

9.10. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B нашлась такая точка D, что $\angle ADM = \angle ACM = 30^\circ$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ACD. Найдите угол OBC.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. 30°.

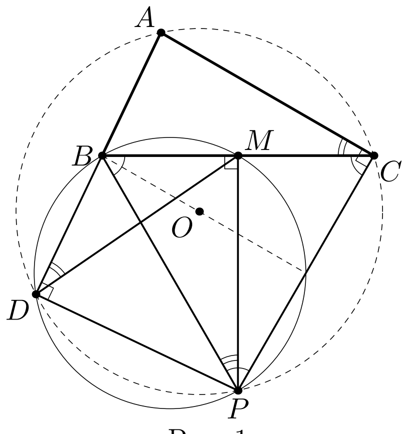

Рис. 1

Решение. Отметим точку P так, что треугольник BCP — равносторонний, а точки A и P лежат по разные стороны от прямой BC (см. рис. 1). Тогда $30^\circ = \angle BPM = \angle BDM$, то есть четырёхугольник $BMPD$ — вписанный; значит, поскольку $\angle BMP = 90^\circ$, то и $\angle BDP = 90^\circ$. Но, так как $\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA = 90^\circ$, четырёхугольник $ADPC$ также вписан в окружность (с диаметром AP), и точка O из условия — центр этой окружности. В частности, O лежит на серединном перпендикуляре к CP, совпадающем с биссектрисой угла PBC. Отсюда и вытекает, что $\angle CBO = 30^\circ$.