11 класс

11.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. Не могло.

Первое решение. Назовём числа $0, 1, \ldots, 49$ *маленькими*, а остальные числа, которые могут появиться на табло, т.е. числа $50, 51, \ldots, 99$ — *большими*. Заметим, что после нажания из маленького числа обязательно получается большое, а из большого числа — маленькое. Значит, после нечётного количества операций на табло будет гореть большое число.

Второе решение. Выстроим все целые числа от 0 до 99 в цепочку

$$50-0-51-1-52-2-53-3-54-4-\ldots-97-47-98-48-99-49.$$

Заметим, что если какое-то число горит на табло, то следующим числом может быть только соседнее число в цепочке. Но так как числа 0 и 25 стоят в цепочке на местах одной чётности, получить из числа 0 число 25 за нечётное количество шагов невозможно.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

11.7. На 2025 островах Северного Ледовитого океана живут несколько медведей. Каждый медведь иногда совершает заплыв, переплывая с одного острова на другой. Оказалось, что за год каждый медведь совершил хотя бы один заплыв, но никакие два медведя не сделали поровну заплывов. При этом между каждыми двумя островами A и B был совершён ровно один заплыв: либо из A в B, либо из B в A. Докажите, что на каком-то острове и в начале, и в конце года не было медведей.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим общее число медведей через n. Тогда всего заплывов сделано не менее $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, общее число заплывов равно количеству пар островов, то есть $\frac{2025 \cdot 2024}{2}$. Таким образом, $n \leqslant 2024$. Посчитаем, сколько медведей было в начале и в конце года на каждом из островов. В сумме получится не более 4048, потому что каждый медведь в начале и в конце года был на одном из островов. Поскольку $4048 < 2025 \cdot 2$, то на каком-то острове A в начале и в конце года в сумме было не более одного медведя. Пусть в начале года на A медведей не было, а в конце года там был ровно 1 медведь. Тогда общее число заплывов, заканчивающихся на острове A, на 1 больше общего числа заплывов, которые на острове A начинаются. Таким образом, остров A был начальной или конечной точкой для нечётного числа заплывов, но это количество должно равняться 2024, противоречие. Аналогично выясняется, что наоборот тоже не бывает, когда в начале года на острове A был один медведь, а в конце года — ноль. Итого на острове A и в начале, и в конце года медведей не было, что и требовалось.

11.8. В пространстве даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые AB и CD. Точки E и F — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что $\frac{AD + BC}{2} > BD - EF$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через M и N середины отрезков AD и BC (см. рис. 5). Тогда ME — средняя линия в треугольнике ACD, а NF — в треугольнике BCD. Следовательно, $ME \parallel CD \parallel NF$. Аналогично $NE \parallel AB \parallel MF$. Таким образом, точки M, E, N, F лежат в одной плоскости, причем из условия $AB \perp CD$ следует, что $MENF$ — прямоугольник. Значит, равны его диагонали MN и EF. Заметим, что $\frac{AD + BC}{2} + EF = DM + MN + NB > BD$ по неравенству ломаной, остаётся вычесть EF из обеих частей.

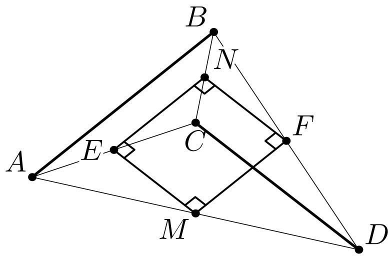

Рис. 5

11.9. Саша выбрал 199 многочленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень. (*А. Кузнецов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что многочленов с положительным старшим коэффициентом больше, чем с отрицательным (иначе домножим все многочлены на -1). Тогда можно выбрать 100 многочленов f_1, f_2, $\ldots$, f_{100} с положительным старшим коэффициентом. Рассмотрим многочлены $g_i(x) = f_i(x) + f_{i+1}(x) + \ldots + f_{i+8}(x)$, где $i = 1$, 2, $\ldots$, 100; $f_{j+100} = f_j$. Получается, что все многочлены $g_i(x)$ тоже с положительными старшими коэффициентами. Значит, если они все не имеют корней, то $g_i(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Но тогда $9(f_1(x) + \ldots + f_{100}(x)) = g_1(x) + \ldots + g_{100}(x) > 0$, то есть многочлен $f_1 + \ldots + f_{100}$ не имеет вещественных корней, противоречие.

11.10. Несколько карточек выложили в ряд слева направо, на каждой карточке написана буква русского алфавита. Назовём набор из 33 карточек *идеальным*, если на этих карточках выписаны все буквы в алфавитном порядке слева направо. Известно, что при любом выборе одной буквы L русского алфавита найдутся 10^6 идеальных наборов, любые два из которых либо не имеют общих карточек, либо имеют ровно одну общую карточку, на которой написана буква L. При каком наибольшем k в этом ряду гарантированно можно найти k идеальных наборов, любые два из которых не имеют общих карточек? (*И. Богданов*)

Ответ. При $k = 33$.

Решение. Положим $N = 10^6$. Покажем сначала, как выложить карточки так, чтобы больше 33 попарно не пересекающихся идеальных наборов не нашлось. Для удобства обозначим буквы в алфавитном порядке через $z_1, z_2, \ldots, z_{33}$; через z^k будем обозначать последовательность из k карточек, на каждой из которых написана буква z.

Наш ряд будет состоять из 33 блоков $B_1, B_2, \ldots, B_{33}$, выложенных друг за другом в этом порядке. Блок B_i выглядит как $z_1^N z_2^N \ldots z_{i-1}^N z_i z_{i+1}^N \ldots z_{33}^N$ (единственную карточку с буквой z_i в этом блоке назовём *особой*). Ясно, что уже в i-м блоке содержится N идеальных наборов, у которых общей является только особая карточка. Докажем теперь, что в каждом идеальном наборе в полученном ряду есть особая карточка. Поскольку особых карточек всего 33, отсюда будет следовать, что из любых 34 идеальных наборов два обязательно пересекутся по какой-то особой карточке, то есть k не может быть больше 33.

Действительно, предположим, что нашёлся идеальный набор, в котором нет особых карточек. Найдётся индекс i такой, что буква z_i этого набора встречается не правее блока B_i (подходит хотя бы $i = 33$); выберем наименьшее такое i. Если карточка z_i нашего набора встречается левее B_i, то $i > 1$, и z_{i-1} также встречается в наборе левее B_i, то есть не правее B_{i-1}; это противоречит минимальности i. Значит, z_i встречается именно в блоке B_i, то есть написана на особой карточке, что и требовалось.

Осталось показать, что $k = 33$ попарно не пересекающихся идеальных наборов выбрать всегда можно. При $1 \leqslant i \leqslant 33$ обозначим через S_i множество из 10^6 идеальных наборов, не имеющих общих букв, кроме, возможно, z_i (оно существует по условию). Мы выберем из каждого множества по набору так, чтобы в них не было общих карточек.

Для начала, если в каком-то множестве S_i найдутся 10^4 наборов, имеющих общую карточку (естественно, с буквой z_i), выделим такие 10^4 наборов, выбросим из S_i остальные наборы, а общую карточку назовём *полезной* для буквы z_i. Теперь мы будем по очереди выбирать набор из $S_1, S_2, \ldots, S_{33}$ так, чтобы он не содержал полезных карточек для букв, отличных от z_i, и не пересекался с уже выбранными наборами.

Пусть наборы из $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$ уже выбраны. Если не существует полезной карточки с буквой z_i, то уже выбранные наборы содержат $i - 1 \leqslant 32$ варточек с буквой z_i, каждая из которых встречается меньше 10^4 раз в наборах в S_i. Выкинув эти наборы, будем считать, что карточки с z_i в наборах из S_i не содержатся в уже выбранных наборах (если полезная карточка с буквой z_i есть, это уже выполнено), и в S_i не меньше 10^4 наборов.

Далее, $i - 1$ выбранный набор содержит $32(i - 1)$ других нарточек, каждая из которых содержится максимум в одном наборе из S_i; выкинув все эти наборы, оставим в S_i как минимум 5000 наборов, не пересекающихся с уже выбранными. Среди этих наборов максимум 32 содержат полезные карточки с буквами, отличными от z_i; выбрав любой набор, не содержащий такой карточки, мы завершим шаг.

После завершения 33-го шага мы получим 33 попарно не пересекающихся идеальных набора, что и требовалось.

Комментарий. *Пример.*

Приведён пример, показывающий, что $k \leqslant 33$ (без обоснования) — 1 балл.

Обоснование верного примера — +2 балла.

Оценка.

Только доказано, что $k = 33$ попарно не пересекающихся идеальных набора всегда найдутся — 4 балла.

В работе присутствует идея последовательного выбора непересекающихся наборов из $S_1, S_2, \ldots, S_{33}$ — 1 балл.

Баллы за пример складываются с баллами за оценку.