Региональный этап

Содержание

11.1. Честно и прямолинейно 2
11.2. Взрыв нечерного тела 4
11.3. Я календарь переверну. 8
11.4. Межгалактическая слежка 9
11.5. Сферическое в вакууме 11
11.6. Очень страшная задача 14

11.1. Честно и прямолинейно

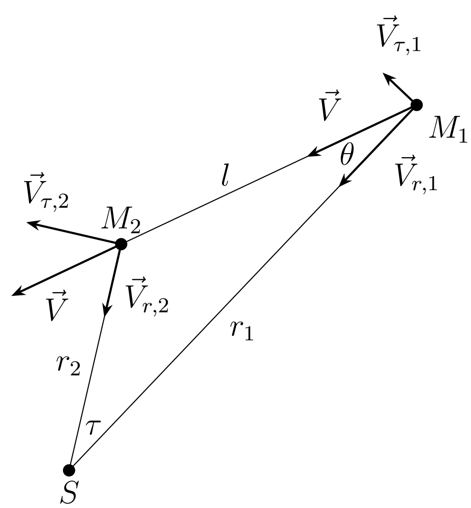
А.В.Веселова

В таблице приведены данные о положении, компонентах скорости и видимой звездной величине некоторой звезды. Определите такой же набор данных для второго положения звезды, считая ее движение относительно Солнца прямолинейным и равномерным. Все данные приведены к эпохе J2000.0.

α	δ	π, $''$	μ, $''$/год	V_r, км/с	m
3^h00^m	$0°00'$	$0''.10$	0.40	-30.0	$+3^m.0$
3^h15^m	$0°00'$				

Решение. Определим параметры движения звезды. Все относящиеся к первому положению звезды величины, то есть указанные в таблице, будем обозначать индексом 1, величины для нового положения — индексом 2.

Рассмотрим схему движения звезды относительно Солнца (S), нарисуем проекции скорости $\vec{V}$ на луч зрения (компоненты $\vec{V}_{r,1}, \vec{V}_{r,2}$) и в картинной плоскости (компоненты $\vec{V}_{\tau,1}, \vec{V}_{\tau,2}$).



Рассчитаем тангенциальную скорость $V_{\tau,1}$ по собственному движению и параллаксу:

$$V_{\tau,1} = 4.74\mu r_1 = 4.74\mu/\pi_1 = 4.74 \cdot 0.4/0.1 = 19 \text{ км/с}.$$

Полная скорость ($V = V_1 = V_2$) равна

$$V = \sqrt{V_{r,1}^2 + V_{\tau,1}^2} = \sqrt{30^2 + 19^2} = 35.5 \text{ км/с}.$$

Относительно луча зрения полная скорость направлена под углом

$$\theta = \arccos \frac{|V_{r,1}|}{V} = 32^\circ.3.$$

Движение звезды относительно Солнца прямолинейное и равномерное, причем в угловой мере звезда смещается на $\tau = \alpha_2 - \alpha_1 = 15^m = 3^\circ.75$.

Из теоремы синусов для треугольника положений звезд и Солнца имеем

$$\frac{\sin\theta}{r_2} = \frac{\sin\tau}{l} = \frac{\sin\big(180^\circ - (\tau+\theta)\big)}{r_1}.$$

Так как $r_1[\text{пк}] = 1/\pi_1$, а $r_2[\text{пк}] = 1/\pi_2$, получаем

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \frac{\sin\big(180^\circ - (\tau+\theta)\big)}{\sin\theta} = 0''.11.$$

Оценим новую видимую звездную величину с учетом того, что при постоянной светимости освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до объекта:

$$m_2 - m_1 = -2.5\frac{1/r_2^2}{1/r_1^2} = -5\lg\frac{\pi_2}{\pi_1} = -0^m.2, \quad m_2 = 2^m.8.$$

Оценим новую лучевую скорость:

$$V_{r,2} = -V\cos\big(180^\circ - (180^\circ - (\theta+\tau))\big) = -28.7\,\text{км/с}.$$

Далее определим тангенциальную скорость и собственное движение:

$$V_{\tau,2} = V\sin\big(180^\circ - (180^\circ - (\theta+\tau))\big) = 20.9\,\text{км/с}, \quad \mu_2 = \frac{V_{\tau,2}}{4.74 r_2} = 0''.49/\text{год}.$$

Таким образом, итоговая таблица выглядит так:

α	δ	π, $''$	μ, $''$/год	V_r, км/с	m
3^h00^m	$0^\circ00'$	$0''.10$	0.40	-30.0	$+3^m.0$
3^h15^m	$0^\circ00'$	$0''.11$	0.49	-28.7	$+2^m.8$

Критерии оценивания. **16**

Каждая арифметическая ошибка, не приводящая к явно нелепому ответу, снижает оценку за соответствующий пункт на 1 балл. Максимальная оценка последующих пунктов при этом не снижается.

K1. Параллакс второго положения **6**

Вычисление смещения объекта на земном небе (угол τ) 1

Вычисление первоначальной тангенциальной скорости 2

Вычисление полной скорости 1

Определение параллакса во второй момент времени 2

K2. Видимая звездная величина во втором положении **3**

Значение должно получиться *меньше*, чем в первый момент времени. Если это условие не выполнено, то за пункт выставляется не более 1 балла.

K3. Лучевая скорость во втором положении **3**

Лучевая скорость должна получиться *отрицательной*. Если это условие не выполнено, то за пункт выставляется не более 1 балла.

K4. Собственное движение во втором положении **4**

Тангенциальная скорость должна получиться *больше*, чем в первый момент времени, как и собственное движение. Тангенциальную скорость также можно определить по лучевой из прямоугольного треугольника скоростей.

Вычисление тангенциальной скорости 2

Вычисление собственного движения 2

11.2. Взрыв нечерного тела

П.А.Тараканов

Вспышки новых звезд объясняются взрывным синтезом гелия из водорода, происходящим на поверхности белого карлика, являющегося одним из компонент двойной звезды. Пусть вспышка произошла на белом карлике с массой, равной массе Солнца, и радиусом, равным радиусу Земли, в результате чего видимая звездная величина звезды изменилась на 10^m и в максимуме блеска составила $+10^m$. Известно, что в результате вспышки 1% массы водородной оболочки превратился в гелий, общая энергия, высвеченная при вспышке, составила 10^{38} Дж, а вспышка продолжалась 11 суток, в течение которых блеск новой практически не менялся. Оцените:

A. ускорение свободного падения на поверхности белого карлика;

B. массу взорвавшейся водородной оболочки белого карлика (в массах Солнца);

C. расстояние до новой звезды;

D. характерную температуру водородной оболочки непосредственно перед вспышкой;

E. характерную толщину водородной оболочки непосредственно перед вспышкой.

В реакциях синтеза гелия из водорода 0.7% массы прореагировавшего вещества переходит в энергию. Все болометрические поправки считать равными нулю, межзвездным поглощением пренебречь.

Решение.

A. Вращением белого карлика (БК) вокруг оси можно пренебречь: он входит в состав тесной двойной системы (в противном случае аккреция вещества со второго компонента не происходила бы) и в системе должна была произойти приливная синхронизация. Как следствие, период вращения БК вокруг оси примерно совпадает с орбитальным периодом системы, который не может быть малым.

Поэтому ускорение свободного падения можно вычислить просто как

$$g = \frac{G\mathfrak{M}}{R^2}, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}$ — масса карлика, R — его радиус. Зная массу Солнца и радиус Земли, получаем (здесь и далее в промежуточных вычислениях все численные данные выражены в СИ)

$$g = \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2. \tag{2}$$

B. При превращении 1% массы оболочки $\mathfrak{M}_{\text{об}}$ из водорода в гелий должна была выделиться энергия $E = 0.01\alpha\,\mathfrak{M}_{\text{об}}c^2$, где $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$, c — скорость света. Тогда

$$\mathfrak{M}_{\text{об}} = \frac{E}{\alpha\, c^2 \cdot 0.01} = \frac{10^{38}}{7 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{25} \text{ кг} = 10^{-5}\ \mathfrak{M}_\odot. \tag{3}$$

C. Оценим светимость новой в максимуме вспышки. За время $t = 11$ суток была высвечена энергия E, поэтому светимость

$$L = \frac{E}{t} = \frac{10^{38}}{11 \cdot 9 \cdot 10^4} = 10^{32} \text{ Вт} \tag{4}$$

(с достаточной для нас точностью в сутках $9 \cdot 10^4$ секунд).

Тогда абсолютная звездная величина новой в максимуме вычисляется из соотношения

$$M - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} \tag{5}$$

и

$$M = 4^m.7 - 2.5 \lg \frac{10^{32}}{3.8 \cdot 10^{26}} \approx -8^m.8 \tag{6}$$

(отметим, что она будет болометрической — у нас нет информации о том, в каких диапазонах высвечивалась энергия вспышки; впрочем, по условию задачи разница между оптическими и болометрическими звездными величинами отсутствует).

Для оценки расстояния воспользуемся соотношением $M = m - 5 \lg r + 5$, откуда

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{(10+8.8+5)/5} \approx 58 \cdot 10^3 \text{ пк} = 58 \text{ кпк}. \tag{7}$$

Это за пределами Галактики, но странным такой результат не является: вспышки новых успешно наблюдаются и в других галактиках. Эта вспышка, по-видимому, произошла в каком-то из Магеллановых облаков.

D. Напрашивается идея, что непосредственно перед вспышкой БК представлял собой шар, излучающий только за счет того, что он нагрет до некоторой температуры T. Поскольку его радиус R нам известен, то если мы знаем его светимость L_0, то температуру можно будет определить из соотношения $L_0 = 4\pi R^2 \sigma T^4$ (тут σ — постоянная Стефана-Больцмана).

Верхнюю возможную оценку светимости L_0 можно найти, считая, что видимая звездная величина белого карлика (а значит и абсолютная тоже) изменилась на 10^m при вспышке. Фактически это эквивалентно предположению, что излучением второго компонента системы можно пренебречь, что более-менее правдоподобно только для максимума вспышки. Все же воспользуемся им, понимая, что учет наличия второго компонента понизит оценку светимости L_0 и, как следствие, найденную оценку температуры.

Такое изменение абсолютной звездной величины соответствует изменению светимости на 4 порядка, откуда $L_0 = 10^{28}$ Вт. Тогда можно вычислить температуру (точнее, также ее верхнюю оценку):

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_0}{4\pi\sigma R^2}} = \sqrt[4]{\frac{10^{28}}{4\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2}} \approx 1.4 \cdot 10^5 \text{ K}. \tag{8}$$

Однако полученный результат явно нелеп: при этой температуре должны были «запуститься» реакции синтеза гелия из водорода, а она для этого слишком мала (несмотря на то, что мы получили ее оценку сверху). Причина в том, что водородная оболочка

БК, как мы увидим далее, является достаточно тонкой и, как следствие, она прозрачна для собственного излучения. Поэтому модель абсолютно черного тела для описания ее излучения непригодна.

Это означает, что оценку температуры надо получить другим путем. Поскольку температура должна быть достаточной для запуска термоядерных реакций, можно использовать в качестве оценки минимальную температуру в центре звезд главной последовательности — это несколько миллионов кельвинов. Более точной оценка получится, если учесть, что реакции синтеза гелия из водорода в новых — это реакции CN-цикла, для запуска которых нужна большая температура (этот цикл становится основным в звездах главной последовательности с массой, несколько большей солнечной, поэтому и температура должна быть несколько больше, чем температура в центре Солнца). Лучшей оценкой будет $T \approx 2 \cdot 10^7$ К.

E. Для оценки толщины оболочки воспользуемся известным выражением для толщины однородной атмосферы (она же экспоненциальный масштаб атмосферы)

$$h_0 = \frac{\mathfrak{R}T}{\mu g}, \tag{9}$$

где $\mathfrak{R}$ — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа. Поскольку водород при таких температурах полностью ионизован, молярная масса окажется равной $0.5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а все остальные данные у нас уже имеются. Тогда

$$h_0 = \frac{\mathfrak{R}T}{\mu g} = \frac{8.3 \cdot 2 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^6} \approx 10^5 \text{ м.} \tag{10}$$

Критерии оценивания. **16**

Во всех случаях, если иное не оговорено в критериях, при вычислении численных результатов достаточна точность, с которой соответствующий результат указан в авторском решении. После каждого критерия указаны также возможные варианты оценки, которые *не суммируются*.

K1. Ускорение свободного падения **2**

K2. Масса оболочки **3**

Записана правильная формула, но численный результат неверен 1

Численный результат верен, но выражен не в массах Солнца 2

K3. Расстояние **4**

Данный этап состоит из трех действий (вычисление светимости, вычисление абсолютной звездной величины, вычисление расстояния), каждое из которых оценивается 1 баллом при условии записи правильной формулы для вычисления соответствующей величины (или правильной соответствующей части более общей формулы). Еще 1 балл выставляется при условии получения правильного расстояния (с допустимой погрешностью ±5 кпк).

K4. Температура оболочки **4**

Использование модели АЧТ без осмысления результата 0

Оценка температуры АЧТ и понимание, что результат слишком мал 2

Оценка $T = (1 - 5) \cdot 10^6$ K 2

Оценка $T = (5 - 15) \cdot 10^6$ K 3

Оценка $T = (15 - 25) \cdot 10^6$ K 4

K5. Толщина оболочки **3**

Численный ответ считается правильным, если он соответствует ранее полученным участником значениям ускорения свободного падения и температуры.

Правильно записана только формула 1

Значение молярной массы неверно, вычислительных ошибок нет 2

11.3. Я календарь переверну...

М.И.Волобуева

На некоторой далекой экзопланете продолжительности солнечных и звездных суток соотносятся как 2014 : 2025. Считая, что жители этой планеты используют солнечный календарь, определите продолжительность обычного (невисокосного) календарного года на этой планете в местных солнечных сутках. Как часто в таком календаре будут встречаться високосные года? Прецессией оси экзопланеты пренебречь.

Решение.

В отсутствие прецессии оси вращения экзопланеты тропический и звездный год совпадают, поэтому календарный год в среднем должен соответствовать периоду обращения экзопланеты вокруг звезды. Количество солнечных и звездных суток в одном году различается ровно на единицу. Пусть в году n солнечных суток. По условию продолжительность звездных суток больше, поэтому в году их будет $n-1$. Найдем n:

$$2014 \cdot n = 2025 \cdot (n-1) \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{2025}{2025-2014} = 184 + \frac{1}{11}.$$

Таким образом, календарный невисокосный год на этой планете должен состоять из 184 дней, а каждый 11-й год должен быть високосным.

Критерии оценивания. **16**

После части критериев указаны возможные варианты оценки.

К1. Соотношение между звездным и тропическим годом **2**

Указание, что при отсутствии прецессии тропический и звездный год совпадают.

К2. Составление уравнения **4**

Участник может использовать разницу в количестве звездных и солнечных суток в году, формулу для синодического периода и другие аналогичные рассуждения.

К3. Определение точной продолжительной года в солнечных сутках **4**

Если участник путает солнечные и звездные сутки и получает продолжительность года на 1 сутки меньше, то этот критерий не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Иной ответ 0

К4. Продолжительность невисокосного календарного года **3**

183 дня 1

Иной ответ 0

К5. Частота появления високосных годов **3**

Иной ответ 0

11.4. Межгалактическая слежка

А.В.Веселова

С поверхности Земли на широте 60° с. ш. наблюдается эллиптическая галактика, состоящая из 50 миллиардов звезд, похожих на Солнце. Склонение галактики равно 60°, а ее красное смещение составляет 0.01. Галактика наблюдается в «окне прозрачности». Оцените

A. расстояние до галактики;

B. абсолютную звездную величину галактики;

C. минимальную и максимальную высоты над горизонтом, на которых она наблюдается;

D. минимальную и максимальную видимую звездную величину галактики в течение года.

Атмосферное поглощение в зените составляет $0^m.2$.

Решение.

Оценим внеатмосферную видимую звездную величину галактики. Для этого определим ее светимость и расстояние до нее. Красное смещение невелико, поэтому для оценки не будем учитывать изменение видимого блеска за счет космологических эффектов.

Светимость галактики равна $50\cdot10^9\cdot L_\odot = 5\cdot10^{10} L_\odot$. Расстояние оценим из закона Хаббла:

$$Hr = cz \quad \Rightarrow \quad r = \frac{cz}{H} = \frac{3\cdot10^5\,\text{км/с}\cdot 0.01}{68\,\text{км/с/Мпк}} = 44\,\text{Мпк}.$$

Абсолютную звездную величину оценим, сопоставив галактику и Солнце:

$$M - M_\odot = -2.5\lg\frac{L}{L_\odot} \quad \Rightarrow \quad M = 4.7 - 2.5\lg(5\cdot10^{10}) = -22^m.0.$$

Тогда видимая звездная величина за пределами атмосферы составит

$$m_0 = M - 5 + 5\lg r = -22^m.0 - 5 + 5\lg\left(4.4\cdot10^7\right) = 11^m.2.$$

Учет поглощения в нашей Галактике не требуется — по условию галактика наблюдается в «окне прозрачности».

От времени года видимая звездная величина галактики не зависит никак. Даже если галактика на небе расположена рядом с эклиптикой, это влияет только на возможность ее наблюдения в разные сезоны года. Поэтому все изменения видимой звездной величины галактики обусловлены только одним фактором: изменением ее высоты над горизонтом (и, как следствие, разным поглощением в атмосфере).

Определим диапазон высот, на которых галактика наблюдается на широте 60°, то есть оценим высоты верхней и нижней кульминаций:

$$h_{\text{вк}} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

$$h_{\text{нк}} = |\varphi + \delta| - 90^\circ = 60^\circ + 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Путь, проходимый лучом света в атмосфере для достаточно больших высот над горизонтом можно оценить в предположении плоской атмосферы толщиной H_0:

$$l(h) = \frac{H_0}{\sin h} \quad \Rightarrow \quad m(h) = m_0 + A \cdot \frac{l(h)}{H_0} = m_0 + A \cdot \frac{1}{\sin h},$$

где A — поглощение в зените.

В верхней кульминации видимая звездная величина окажется равной

$$m_{\text{вк}} = 11^m.2 + 0^m.2 = 11^m.4,$$

в нижней кульминации

$$m_{\text{нк}} = 11^m.2 + 0^m.2/\sin 30^\circ = 11^m.6.$$

Критерии оценивания. **16**

Каждая арифметическая ошибка, не приводящая к явно нелепому ответу, снижает оценку за соответствующий пункт на 1 балл. Максимальная оценка последующих пунктов при этом не снижается.

K1. Определение расстояния до галактики по закону Хаббла **3**

Ответ должен лежать в диапазоне 40 – 50 Мпк.

K2. Определение абсолютной звездной величины галактики **3**

Можно использовать сопоставление с Солнцем или иные способы, в том числе разумные предположения или сравнение с известными галактиками. Ответ должен попасть в диапазон от -23^m до -21^m.

K3. Определение видимой звездной величины галактики **2**

K4. Определение минимальной и максимальной высот над горизонтом **2**

Требуемая точность $\pm 0^\circ.5$, каждое значение оценивается 1 баллом. Участник может также учесть преломление света в атмосфере, это незначительно влияет на ответы и никак не влияет на оценку.

K5. Упоминание или получение связи поглощения с высотой объекта над горизонтом **3**

K6. Оценка видимой звездной величины в верхней кульминации **1**

В этом и следующем пунктах отличие ответов от авторских может являться следствием получения другого значения абсолютной звездной величины галактики.

K7. Оценка видимой звездной величины в нижней кульминации **2**

Участник может рассматривать более сложную модель прохождения луча света через атмосферу, с учетом кривизны ее слоев, это незначительно влияет на ответы и никак не влияет на оценку.

11.5. Сферическое в вакууме

П.А.Тараканов

Искусственный спутник Земли «Эхо-2» представлял собой зеркальный шар диаметром 41 м и массой 256 кг. Оцените, во сколько раз ускорение, которое ему сообщалось световым давлением Солнца, меньше минимально возможного действующего на него гравитационного ускорения со стороны Луны, если высота его орбиты составляла $1.3 \cdot 10^3$ км.

Решение.

Начнем с вычисления ускорения, обусловленного световым давлением. Каждый отдельный фотон, имеющий энергию ε, обладает импульсом $p = \varepsilon/c$. Если он поглощается поверхностью, то передает этот импульс ей, если отражается строго в обратном направлении — передает удвоенный импульс.

Рассмотрим сначала упрощенный случай, заменив шарообразный спутник на плоский, ориентированный перпендикулярно направлению на Солнце, и имеющей тот же диаметр. Освещенность, которую на нем создает Солнце (энергия, которая приходит на единицу площади его поверхности от Солнца в единицу времени), равна

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi r_\odot^2}, \tag{11}$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца, $r_\odot$ — расстояние до него. Разделив эту величину на скорость света c, мы получим суммарный импульс фотонов, которые падают на единицу площади зеркала за единицу времени. Отметим, что изменение импульса за единицу времени — это сила, а сила, отнесенная к единице площади — давление, поэтому если бы все фотоны были бы поглощены, то величина E/c была бы равна давлению света на поверхность. В случае плоского зеркала, расположенного перпендикулярно направлению на Солнце, все фотоны отражаются обратно и передают зеркалу свой удвоенный импульс (создав тем самым давление, равное $2E/c$). Заметим, что от распределения фотонов по энергиям (т.е. от вида спектра Солнца) эти результаты никак не зависят. Все фотоны, приходящие от Солнца, мы считаем движущимися в одном направлении, считая тем самым угловые размеры Солнца пренебрежимо малыми (будем считать такое приближение очевидным, однако можно показать, что оно внесет в итоговый результат относительную поправку порядка квадрата углового размера Солнца в радианах, т.е. менее 10^{-4}, что нас вполне устроит).

Однако мы имеем дело не с плоским зеркалом, а с шаром. Как следствие, фотоны, летящие вдоль радиуса шара и попадающие в «подсолнечную» точку, действительно передадут ему удвоенный импульс, а вот фотоны, пришедшие к шару почти по касательной, его импульс практически не изменят. Поэтому среднее световое давление должно быть меньше, чем в случае плоской зеркальной поверхности, соответствующий «коэффициент передачи импульса» (обозначим его α) должен быть меньше 2.

Далее можно действовать тремя путями. Первый из них: нас интересует оценка, и поскольку импульс, переданный каждым фотоном, попавшим в шар, варьируется от удвоенного до нулевого, выберем в качестве некоторого среднего значения α единицу — скорее всего, сильно мы при этом не ошибемся (а на самом деле, как будет видно далее, удачно попадем в правильный ответ).

Второй путь состоит в том, чтобы честно выяснить, какая часть импульса будет передана. Для этого придется заняться вычислениями. Рассмотрим фотоны, летящие в тонком кольце радиуса r вокруг прямой, соединяющей Солнце и центр спутника. Толщину кольца обозначим dr. Из построения видно, что фотон, имевший импульс p, передаст шару в горизонталь-

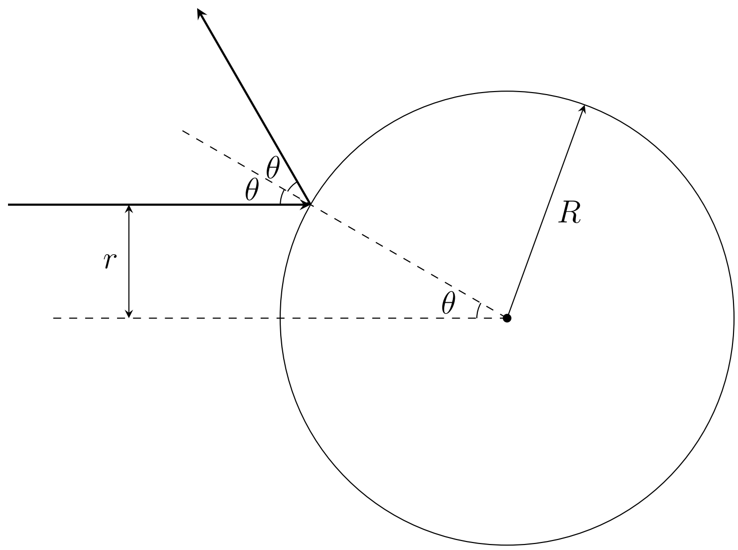


Рис. 1: Отражение фотона от спутника.

ном (на рисунке) направлении импульс $p \cdot (1 + \cos 2\theta)$. Вертикальная компонента импульса нас не интересует — в силу симметрии все такие переданные импульсы в сумме дадут нуль. Поскольку $\sin\theta = r/R$, то переданный импульс можно записать как

$$p \cdot (1 + \cos 2\theta) = p \cdot (1 + 1 - 2\sin^2\theta) = 2p \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{12}$$

Так как кольцо, в котором движутся интересующие нас фотоны, имеет площадь $2\pi r\,dr$, а площадь всего сечения спутника πR^2, то получаем, что для подсчета общего α нам надо сосчитать взвешенное среднее получившихся коэффициентов для колец, умноженных на долю площади, приходящуюся на такое кольцо. Иначе говоря, взять интеграл

$$\alpha = \int\limits_0^R 2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2} = 2\int\limits_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \frac{dr^2}{R^2} = 2\int\limits_0^1 (1 - x)\,dx = 1$$

(тут использована замена $x = r^2/R^2$). Получаем, что первая же оценка оказалась совершенно точной — зеркальный шар ведет себя точно так же, как поглощающий диск того же размера (и, что интересно, и как поглощающий все излучение шар того же размера).

Наконец, третий вариант: можно воспользоваться известным фактом, что зеркальный шар отражает падающие на него параллельные лучи изотропно во всех направлениях. В таком случае суммарный импульс отраженных фотонов будет нулевым, а это означает, что шару передается только импульс падающих фотонов, что приводит нас к уже полученному выше выводу: $\alpha = 1$.

Теперь остается немногое. Получаем, что ускорение, создаваемое световым давлением, можно вычислить как

$$w_\odot = \frac{\alpha\,E}{c} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{L_\odot}{4\pi r_\odot^2 c} \cdot \pi\frac{D^2}{4} \cdot \frac{1}{m} = \frac{L_\odot D^2}{16\,r_\odot^2\,c\,m}, \tag{13}$$

где D — диаметр спутника, а m — его масса. Сразу же отметим, что диаметр известен нам всего лишь с двумя значащими цифрами, а это означает, что в качестве расстояния от Солнца до спутника можно брать величину 1 а.е., большая точность не требуется. Подставляя числовые данные, получаем

$$w_\odot = \frac{L_\odot D^2}{16\, r_\odot^2\, c\, m} = \frac{3.8 \cdot 10^{26} \cdot 41^2}{16 \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 256} = 2.3 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с}^2. \tag{14}$$

Теперь вычислим ускорение со стороны Луны. Оно, очевидно, будет наименьшим в ситуации, когда спутник находится от Луны на максимально большом расстоянии, поэтому начнем с поиска этого расстояния, не забывая, что нас интересует результат с двумя значащими цифрами — получение более точного значения из-за ограниченной точности предыдущего результата лишено смысла. В справочных данных приведено максимальное и минимальное расстояние от Земли до Луны, и хорошо видно, что учет радиуса орбиты спутника вокруг Земли (это $6.4 + 1.3 = 7.7$ тысяч км) и конкретного положения спутника на этой орбите лишены смысла: достаточно считать, что спутник расположен на расстоянии $r_☾ = 4.1 \cdot 10^8$ м от Луны.

Тогда гравитационное ускорение, которое создает Луна, вычисляется как

$$w_☾ = \frac{GM_☾}{r_☾^2} = \frac{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 7.3 \cdot 10^{22}}{(4.1 \cdot 10^8)^2} = 2.9 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с}^2. \tag{15}$$

Остается вычислить отношение ускорений. Ускорение, сообщаемое световым давлением, меньше гравитационного ускорения Луны в $w_☾ / w_\odot = 2.9/2.3 = 1.3$ раза.

Критерии оценивания. **16**

Для всех промежуточных вычислений достаточной является точность 2 значащие цифры (и соответствующая погрешность промежуточных результатов). Учет менее значимых факторов не является ошибкой, но не оценивается дополнительными баллами. После каждого критерия указаны также возможные варианты оценки, которые *не суммируются.*

К1. Определение «коэффициента эффективности передачи импульса» α **5**
- Принят $\alpha = 1$ без обоснований 1
- Принят $\alpha = 2$ 2
- Принят $\alpha = 1$ как примерная оценка среднего 4
- Принят $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ как примерная оценка среднего 3
- Принят $\alpha = 1$ с *любой* попыткой количественного обоснования 5
- Иные варианты 0

К2. Ускорение, обусловленное световым давлением **5**
- Правильная формула, но неверный численный результат 3
- В формуле потеряна масса спутника 2

К3. Гравитационное ускорение **4**
- В качестве расстояния взято среднее расстояние от Земли до Луны 1
  (в этом случае должен быть получен численный ответ $3.3 \cdot 10^{-5}$ м/с^2)
- Расстояние выбрано правильно, но допущена ошибка в вычислениях 2

К4. Итоговый результат **2**
- В качестве ответа дана обратная величина 1

11.6. Очень страшная задача

М.В.Костина

В 2007 году был открыт первый быстрый радиовсплеск FRB 010724. На рисунке 1 приведена запись сигнала всплеска с телескопа Parkes (Австралия) в 96 частотных каналах через 1 мс. Экваториальные координаты источника всплеска $\alpha = 01^h 18^m 06^s$, $\delta = -75°12'19''$.

Известно, что при распространении в плазме радиоволны испытывают дисперсию. Скорость распространения длинных волн в плазме меньше, чем коротких. Разность прихода сигнала на частотах ν_1 и ν_2 равна

$$t_2 - t_1 = \frac{e^2}{2\pi m_e c}\left(\frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_1^2}\right) DM,$$

где e и m_e — заряд и масса электрона, а DM — мера дисперсии:

$$DM[\text{пк/см}^3] = \bar{n}_e d,$$

где $\bar{n}_e$ — средняя концентрация электронов на луче зрения и d — расстояние до источника.

В астрономии принято пользоваться гауссовой системой единиц, в которой масса выражается в граммах, время в секундах, а длина в сантиметрах. В этих единицах заряд электрона $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ г$^{1/2}$см$^{3/2}$с$^{-1}$, а мера дисперсии имеет размерность см$^{-2}$. Однако меру дисперсии обычно принято выражать в пк/см^3.

A. Найдите меру дисперсии DM FRB 010724 в пк/см^3.

B. Предполагая, что концентрация электронов на луче зрения постоянна и равна средней для диска Галактики $n = 3 \cdot 10^{-2}$ см$^{-3}$, найдите расстояние до источника всплеска.

C. Как Вы думаете, полученное Вами расстояние завышено или занижено? Поясните свой ответ.

Решение.

Выразим меру дисперсии из равенства, приведенного в условии:

$$DM = \frac{2\pi m_e c(t_2 - t_1)}{e^2}\left(\frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_1^2}\right)^{-1}.$$

Для того, чтобы найти меру дисперсии, надо узнать моменты прихода сигнала на двух разных частотах. На графике выберем 2 конкретные частоты и получим время прихода для них. Например, для $\nu_1 = 1.5$ ГГц время прихода $t_1 \approx 0.07$ с, а для $\nu_2 = 1.3$ ГГц $t_2 \approx 0.3$ с. Подстановка чисел в формулу дает (надо не забыть перевести массу в граммы, а скорость в см/с):

$$DM = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot (0.3 - 0.07)}{(4.8 \cdot 10^{10})^2}\left(\frac{1}{(1.3 \cdot 10^9)^2} - \frac{1}{(1.5 \cdot 10^9)^2}\right)^{-1} \approx 1.15 \cdot 10^{21}\text{см}^{-2}.$$

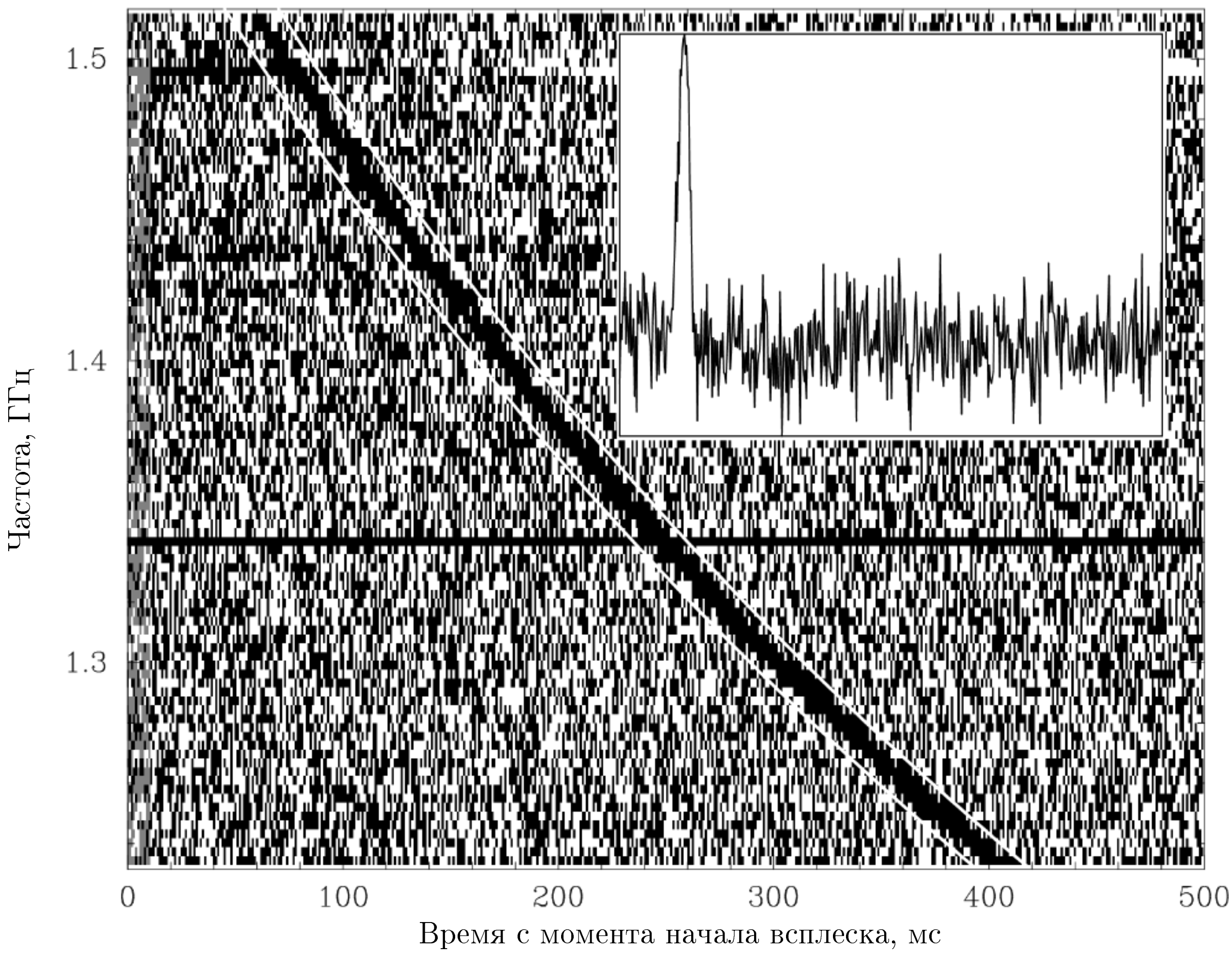


Рис. 2: Запись сигнала всплеска с телескопа Parkes (Австралия) в 96 частотных каналах. Горизонтальная линия — артефакт, связанный со сбоем аппаратуры. На вставке приведен средний по всем частотам временной профиль всплеска.

Для того, чтобы перевести DM из см$^{-2}$ в пк/см^3, нужно разделить полученное число на число сантиметров в парсеке. Итого получаем

$$DM = 1.15 \cdot 10^{21} \text{см}^{-2} / 3 \cdot 10^{18} \text{ см/пк} \approx 380 \, \text{пк/см}^3.$$

Расстояние $d = DM/\bar{n}_\text{e} = 380/0.03 \approx 13$ кпк.

Для вычисления расстояния мы взяли постоянную концентрацию электронов на луче зрения. В реальности она меняется в зависимости от того, через более или менее плотную среду в Галактике и за ее пределами проходит излучение. Если среда менее плотная, чем в среднем по Галактике, то расстояние, на котором набирается та же мера дисперсии, больше, чем полученное нами. Если более плотная, то меньше.

Радиус нашей Галактики равен 15 кпк, Солнце находится на расстоянии 8 кпк от ее центра, а толщина диска Галактики очень мала по сравнению с его радиусом. Таким образом понимание того, завышено или занижено полученное нами расстояние в 13 кпк, сильно зависит от направления в Галактике, в котором был виден всплеск.

Источник FRB 010724 находится в точке с координатами $\alpha = 01^h18^m06^s$, $\delta = -75°12'19''$. Центр Галактики имеет экваториальные координаты $\alpha = 17^h46^m$, $\delta = -29°00'$. Приблизительно их можно определить, вспомнив, что центр Галактики находится в созвездии Стрельца, в котором также находится точка зимнего солнцестояния с координатами $\alpha = 18^h$, $\delta = -23°.4$. Известно, что Млечный путь на небе проходит через созвездия Стрельца (уже упомянутого), Лебедя, Персея и Ориона. Это можно либо помнить из опыта собственных наблюдений, либо из названий соответствующих рукавов Галактики (рукав Ориона и т.д.). Созвездие Ориона располагается примерно на экваторе под созвездиями Тельца и Близнецов, то есть примерно под точкой летнего солнцестояния. Созвездие Лебедя, прекрасно видимое летом и осенью, расположено в северном полушарии неба между точками зимнего солнцестояния и весеннего равноденствия. Персей — осенне-зимнее созвездие, располагается между точками весеннего равноденствия и летнего солнцестояния также в северном полушарии. Таким образом мы понимаем, что в интересующей нас области прямых восхождений, около точки весеннего равноденствия, Млечный путь располагается над экватором в области положительных склонений. Это означает, что луч, направленный в точку с координатами $\alpha = 01^h18^m06^s$, $\delta = -75°12'19''$, не лежит в плоскости Галактики и ее окрестностях, а проходит под большим углом к ней.

К этому же выводу можно прийти другим путем, если помнить, что Северный полюс Галактики имеет экваториальные координаты $\alpha \approx 13^h$, $\delta \approx 27°$. Тогда Южный полюс имеет координаты $\alpha \approx 1^h$, $\delta \approx -27°$ и лежит примерно на том же круге склонений, что и источник всплеска. Таким образом расстояние от источника всплеска до Южного полюса Галактики примерно равно $|-75° - (-27°)| = 48°$, а от плоскости Галактики примерно $90° - 48° = 42°$.

Следовательно, в Галактике излучение всплеска прошло лишь малую долю своего полного пути и набрало существенно меньшую меру дисперсии, чем вычисленная нами. Остальная часть пути излучения пролегала по среде с намного меньшей плотностью, чем средняя по Галактике. Чтобы набрать недостающую меру дисперсии, ему было необходимо пройти существенно большее расстояние. Таким образом, расстояние, полученное нами, сильно занижено.

Авторы открытия всплеска оценили, что в Галактике излучение FRB 010724 набрало лишь $DM = 25$ пк/см^3 из 380 пк/см^3.

Критерии оценивания. **20**

К1. Вычисление меры дисперсии **10**
- Снятие показаний с графика 4
- Вычисление меры дисперсии см$^{-2}$ 3
- Перевод в пк/см^3 3

К2. Вычисление расстояния **2**

К3. Ответ на вопрос C **8**
- Понимание, в каком случае расстояние завышено, а в каком занижено 2
- Определение положения источника относительно плоскости Галактики 4
- Ответ «занижено» 2