ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2024 г.

ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 6 КЛАСС

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

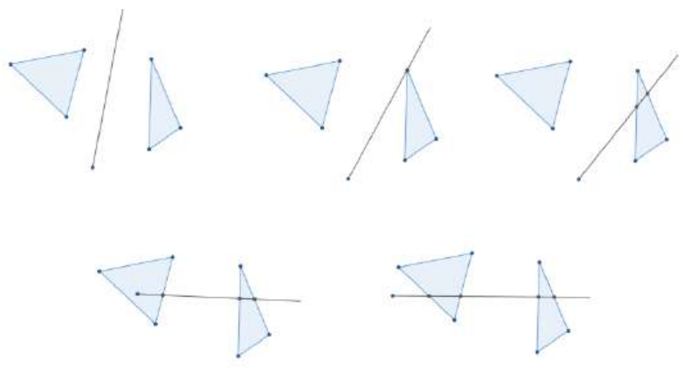
Максимальное количество баллов — 8.

1. Даны числа 1, 4, 5, 6, 9. Припишите к каждому из них слева одну из цифр 1, 2, 4, 6, 8 так, чтобы каждое число стало квадратом.
___ 1
___ 4
___ 5
___ 6
___ 9
Ответ: 16, 25, 49, 64, 81.

Решение.
Перечислим все двузначные числа, являющиеся полными квадратами: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Из них заканчиваются на цифры 1, 4, 5, 9: 81, 64, 25, 49. Заметим, что цифры 3 у нас нет, поэтому оставшееся число может быть только числом 16.

2. На плоскости нарисовали два произвольных непересекающихся треугольника и луч. Сколько общих точек могло образоваться? Выберите все верные варианты ответа: 0, 2, 3, 5, 6
Ответ: 0, 2, 3.

Решение.
Луч может пересекать каждый треугольник максимум в двух точках (см. также замечание). Таким образом общее число точек пересечения не может быть больше 4. Остальные варианты возможного расположения луча и двух треугольников с количеством точек пересечения от 0 до 4 представлены на рисунке.

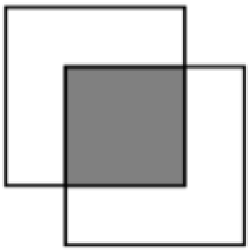


Замечание. Луч может пересекаться с треугольником и в бесконечном числе точке, если, например, он содержит сторону треугольника (или часть стороны), но такого варианта ответа для выбора у нас нет.

3. В апреле Аня каждый день совершала прогулку. В те 16 дней, когда согласно прогнозу ожидался дождь, она брала с собой зонтик, в остальные дни – не брала. За 30 апрельских дней прогноз погоды оправдался ровно 20 раз. К счастью, в те дни, когда шел дождь, у Ани всегда был с собой зонтик. Сколько дней в апреле шёл дождь?
Ответ: 6.

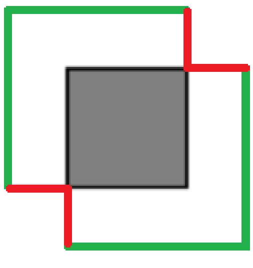
Решение.
Будем называть день, в который не было дождя «бездождливым». По прогнозу «бездождливых» дней было $30 - 16 = 14$. В каждый из них прогноз оправдался, иначе бы Аня оказалась в дождь без зонтика. Тогда прогноз дождя оправдался в те $20 - 14 = 6$ дней, в которые ожидался дождь.

4. Фигура на рисунке состоит из двух одинаковых квадратов, наложенных друг на друга. Общая часть также представляет собой квадрат, который окрашен серым цветом. Площадь каждого большого квадрата 144 см^2, а периметр образованной наложением фигуры равен 68 см. Чему равна сторона закрашенного квадрата? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 7.

Решение.
Так как площадь квадрата со стороной a равна a^2 и $12^2 = 144$, то сторона большого квадрата равна 12. Периметр, фигуры, образованной наложением, равен сумме четырёх зелёных сторон — сторон большого квадрата и четырёх красных отрезков.



Тогда красный отрезок равен $(68 - 4 \cdot 12) : 4 = 5$. Сторона серого квадрата равна разности длин зелёного и красного отрезков: $12 - 5 = 7$.

5. В парке аттракционов 10 билетов стоят дешевле 5560 рублей, а 11 билетов — дороже 6100 рублей. Сколько стоит один билет, если его цена выражается целым числом рублей?
Ответ: 555.

Решение.
Так как 10 билетов стоят дешевле 5560 рублей, то один билет стоит дешевле 556 рублей. С другой стороны, так как 11 билетов дороже 6100 рублей, то один билет дороже $\frac{6100}{11} > 554$ рубля.
Остается единственный возможный вариант стоимости, составляющий целое число рублей — 555 рублей.

6. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове ДОМИНО, чтобы никакие две гласные буквы не стояли рядом и никакие две согласные буквы тоже не стояли рядом? Словом считается любой упорядоченный набор букв. Сам вариант ДОМИНО тоже следует учесть в ответе.
Ответ: 36.

Решение.
Заметим, что в каждой перестановке гласные и согласные буквы чередуются. Поэтому воз-можны 2 варианта ГСГСГС или СГСГСГ, где Г обозначает гласную букву, С — согласную.
В каждом из вариантов количество перестановок согласных букв равно 6. Первую согласную букву можно выбрать 3 способами, вторую двумя, а третья определяется однозначно. Если бы все гласные были различными, то количество перестановок гласных букв тоже было бы равно 6, но так как у нас две буквы О, то число перестановок гласных будет в два раза меньше. Это можно объяснить еще по-другому: нужно выбрать одно из трех мест, в которое поставим букву И. Таким образом, для каждого варианта имеется $3 \cdot 6 = 18$ способов. Значит всего $18 + 18 = 36$ способов.

7. Пираты решили разделить сундук с золотыми монетами, при этом каждый должен получить хотя бы одну монету. Известно, что каждому в среднем досталось по 97 монет. Если не считать капитана, получившего 137 золотых, то среднее количество монету у оставшихся пиратов уменьшится до 89. Какое максимальное количество золотых монет мог получить один из пиратов? Чтобы посчитать среднее количество монет, необходимо сложить количество монет у каждого и разделить на количество пиратов.
Ответ: 441.

Решение.
Пусть n — количество пиратов. Тогда всего у пиратов было $97n$ монет. Если убрать долю капитана, то $97n - 137 = 89(n - 1)$. Получается $8n = 48$ и $n = 6$, а всего было $6 \cdot 97 = 582$ монеты. Капитан получил 137 монет, и еще четверо хотя бы по одной монете, остается $582-137-4 = 441$ монеты максимально мог получить один из пиратов.

8. Из 343 единичных кубиков сложили куб размером 7×7×7 и покрасили его грани. После этого убрали те единичные кубики, у которых было по 3 покрашенных грани, и у получившейся фигуры докрасили все видимые грани. Потом эту процедуру повторили ещё дважды. Из скольких единичных кубиков состоит оставшаяся фигура?
Ответ: 263.

Решение.
Изначально 3 грани были окрашены только у угловых кубиков, их 8. На втором шаге три грани окрашены у каждого из трёх кубиков, граничащих с угловыми т.е. у $3 \cdot 8 = 24$ и, наконец, на третьем шаге добавится ещё по 6 кубиков со стороны каждой из вершин, т.е. $6 \cdot 8 = 48$.
Всего останется $343 - 8 - 24 - 48 = 263$ кубика останется. На рисунках ниже показано, какие кубики были удалены на каждом шаге, на примере одной из вершин куба.