11 класс

Второй день

11.5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

11.6. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O, его высоты пересекаются в точке H. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная AH, а через точку H — прямая, перпендикулярная AO. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами AB и AC лежат на одной окружности, которая касается окружности ω.

11.7. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство наугад определяет стоимость строительства дороги (с двусторонним движением) между каждыми двумя городами, используя по разу все суммы от 1 до $n(n-1)/2$ талеров (все варианты равновероятны). Мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $n-1$ возможных дорог, идущих из этого города, и она строится (это может быть взаимным желанием мэров обоих соединяемых городов или только одного из двух).

После строительства этих дорог города оказываются разбиты на M компонент связности (между городами одной компоненты связности можно добраться по построенным дорогам, возможно, с пересадками, а между городами разных компонент — нельзя). Найдите математическое ожидание случайной величины M.

11.8. Докажите, что существует такое $c > 0$, что для любого нечётного простого $p = 2k+1$ числа $1^0, 2^1, 3^2, \ldots, k^{k-1}$ дают хотя бы $c\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.