Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

Нижний Новгород, 19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

(*А. Солынин*)

Ответ. 1120 см.

Решение. Будем измерять высоту сугроба в дециметрах. Также будем считать, что сторона одной клетки равна 1 дм, то есть за каждую ночь на клетку выпадает 1 дм^3 снега.

Докажем, что после сотого утра найдется сугроб высотой не менее 112 дм. Предположим, что такого сугроба нет. Так как дворник в сотое утро полностью сгрёб снег с какого-то ряда, в десяти клетках квадрата снега нет. В каждой из оставшихся 90 клеток, по нашему предположению, не более 111 дм^3 снега, то есть всего снега не больше, чем 9990 дм^3. Однако за 100 ночей суммарно выпало 10 000 дм^3 снега. Противоречие.

Покажем, как может действовать дворник, чтобы после сотого утра каждый сугроб имел высоту не более 112 дм (то есть в каждой клетке было не более 112 дм^3 снега).

Способ 1. Первые 11 дней дворник сгребает снег из второго столбца в первый, следующие 11 дней дворник сгребает снег из третьего столбца во второй, затем 11 дней из четвёртого в третий, и т. д. Через 99 дней в десятом столбце не будет снега. Посчитаем, сколько снега стало в столбце $i \leqslant 9$ через 99 дней.

Вечером $11(i-1)$-го дня в столбце номер i не было снега, а в столбце $i+1$ в каждой клетке было по $11(i-1)$ дм^3 снега. На следующий вечер в столбце i станет по $11(i-1)+2$ дм^3 снега в каждой клетке. Затем ещё десять дней количество снега в каждой клетке i-го столбца будет увеличиваться на 2, а затем $11(9-i)$ дней — на 1. Итого, через 99 дней в каждой клетке столбца i будет по $11(i-1)+22+11(9-i)=110$ дм^3 снега. В сотую ночь выпадет ещё по 1 дм^3 в каждую клетку. А сотым утром дворник сгребет снег из десятого столбца в девятый. Таким образом, в каждой клетке будет не более 112 дм^3 снега.

Способ 2. Пусть дворник сгребёт снег из 2-го столбца в 1-ый, из 3-го во 2-й, ..., из 10-го в 9-ый. Тогда вечером девятого дня в первых девяти столбцах будет по 10 дм^3 снега в каждой клетке, а в десятом столбце снега не будем. Затем дворник проделывает аналогичный процесс в обратном порядке: из 9-го в 10-ый, из 8-го в 9-ый, ..., из 2-го в первой. Тогда вечером 18-го дня в клетках последних девяти столбцов будет по 20 дм^3 снега, а в первом столбце не будет снега. Аналогично повторим такие сдвиги (каждый длится 9 дней) ещё 9 раз, и через 99 дней получим в клетках девяти столбцов по 110 дм^3 снега и один крайний столбец пустой. Сотым утром сгребаем снег из этого крайнего в соседний и получаем не более 112 дм^3 снега в каждой клетке.

9.6. Высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < AC$, пересекаются в точке H, а O — центр описанной около него окружности Ω. Отрезок OH пересекает описанную около треугольника BHC окружность в точке X, отличной от O и H. Окружность, описанная около треугольника AOX, пересекает меньшую дугу AB окружности Ω в точке Y. Докажите, что прямая XY делит отрезок BC пополам. (*А. Терёшин*)

Первое решение. Пусть H' и X' — точки, симметричные точкам H и X относительно середины стороны BC соответственно (см. рис. 1). Тогда $HXH'X'$ — параллелограмм. Так как $\angle BX'C = \angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, точки X' и H' лежат на окружности Ω. При этом, поскольку $H'B \parallel CH \perp AB$, точка H' диаметрально противоположна точке A на этой окружности; следовательно, AH' проходит через O. Вспоминая, что

$XO \parallel H'X'$, получаем $\angle AYX' = 180^\circ - \angle AH'X' = 180^\circ - \angle AOX = \angle AYX$; это и означает, что точки Y, X и X' лежат на одной прямой, делящей BC пополам.

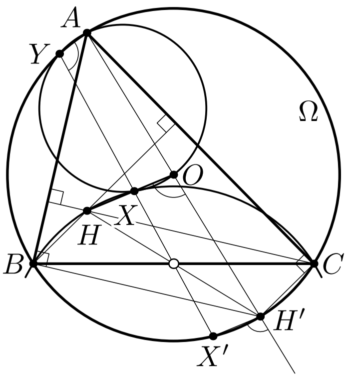

Рис. 1

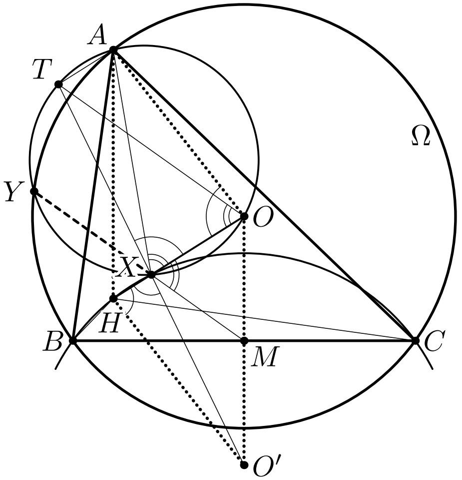

Рис. 2

Второе решение. Поскольку $\angle BHC = 180^\circ - \angle ABC$, окружность (BHC) симметрична окружности Ω относительно BC; пусть O' — центр окружности BHC, а M — середина BC. Тогда M — ещё и середина OO'.

Как известно, $AH = 2OM$ (это доказывается, например, с помощью гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом -2). Поэтому $OO' = 2OM = AH$. Поскольку $OO' \perp BC \perp AH$, четырёхугольник $AHO'O$ — параллелограмм.

Пусть T — точка на луче $O'X$ такая, что $O'T = 2O'X$. Тогда $XT = O'X = O'H = AO$. Кроме того, из равнобедренности треугольника $O'XH$ получаем, что $\angle TXO = \angle O'XH = \angle O'HX = \angle AOX$, поэтому треугольники TXO и AOX равны. Значит, $\angle TOX = \angle AXO$.

Поскольку XM — средняя линия в треугольнике $O'TO$, получаем $\angle MXO = \angle TOX = \angle AXO$, то есть XO — биссектриса угла AXM. Но в окружности $(AXOY)$ имеем $OA = OY$, так что O — середина дуги AXY, а потому XO — внешняя биссектриса угла AXY. Отсюда и следует, что углы AXM и YXM смежные, то есть точки X, Y и M лежат на одной прямой.

Замечание. Приведём ещё несколько свойств конфигурации, которые могут оказаться полезными для решения (все обозначения взяты из решений выше).

Точки A и X' симметричны относительно прямой OH; в частности, $XA = XX' = 2XM$.

Можно указать ещё несколько точек, лежащих на окружности $(AOXY)$. Например, это точка пересечения отрезка AM с окружностью (BHC), а также точка, диаметрально противоположная точке O' в окружности $(BO'C)$.

9.7. На доске написаны 8 различных квадратных трёхчленов; среди них нет двух, дающих в сумме нулевой многочлен. Оказалось, что если выбрать любые два трёхчлена $g_1(x)$, $g_2(x)$ с доски, то оставшиеся 6 трёхчленов можно обозначить как $g_3(x)$, $g_4(x)$, $\ldots$, $g_8(x)$ так, что у всех четырёх многочленов $g_1(x) + g_2(x)$, $g_3(x) + g_4(x)$, $g_5(x) + g_6(x)$ и $g_7(x) + g_8(x)$ есть общий корень. Обязательно ли все трёхчлены на доске имеют общий корень?

(*С. Берлов, методкомиссия*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Построим пример 8 квадратных трёхчленов, удовлетворяющих условию задачи:

$$f_1(x) = -x^2 + 2; \quad f_2(x) = 3x^2 - 2; \quad f_3(x) = -4x^2 + 3;$$
$$f_4(x) = 2x^2 - 3; \quad f_5(x) = -4x^2 + x + 4; \quad f_6(x) = 4x^2 + x - 4;$$
$$f_7(x) = -5x^2 - x + 5; \quad f_8(x) = 5x^2 - x - 5.$$

Данные многочлены составлены так, чтобы их значения в точках $x = -1$, 0, 1 соответствовали следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
0	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

У трёхчленов этого примера нет общего корня (его нет даже у $f_1(x)$ и $f_2(x)$). Осталось показать, что они удовлетворяет условию. Очевидно, никакие два из этих трёхчленов не дают в сумме ноль.

Пусть выбрана какая-то пара из этих квадратных трёхчленов. Если была выбрана пара $(f_{2k-1}(x), f_{2k}(x))$, где $k = 1, 2, 3, 4$, то все многочлены можно разбить на пары $(f_1(x), f_2(x))$; $(f_3(x), f_4(x))$; $(f_5(x), f_6(x))$; $(f_7(x), f_8(x))$, каждая сумма этих пар имеет корень 0.

В противном случае нетрудно убедиться, что значение суммы двух выбранных трёхчленов или в точке $x_0 = -1$, или в точке $x_0 = 1$ (а может быть, и в обеих сразу) равняется нулю. Выберем такое x_0. Оставшиеся многочлены в точке x_0 принимают значения -1 и 1 ровно по три раза, и их можно разбить на пары так, чтобы в x_0 суммы всех четырёх пар равнялись нулю, т.е. x_0 было их общим корнем.

9.8. 1000 детей, среди которых нет двух одинакового роста, выстроились в шеренгу. Назовём пару различных детей (a, b) *хорошей*, если между ними не стоит ребёнка, рост которого больше роста одного из a и b, но меньше роста другого. Какое наибольшее количество хороших пар могло образоваться? (Пары (a, b) и (b, a) считаются одной и той же парой.) (*И. Богданов*)

Ответ. $501^2 - 3 = 250998$.

Решение. Докажем, что в аналогичной задаче для шеренги из $2n$ детей наибольшее возможное количество хороших пар равно $(n+1)^2 - 3$.

Пронумеруем детей числами $1, 2, \ldots, 2n$ в порядке убывания роста. Тогда, если расставить детей в порядке

$$n+1, n+2, \ldots, 2n,\ 1, 2, \ldots, n,$$

то все пары (i, j), где $i \leqslant n < j$, окажутся хорошими; таких пар всего n^2. Кроме этого, все пары вида $(i, i+1)$ также окажутся хорошими; таких пар всего $2n - 1$. При этом пара $(n, n+1)$ учтена дважды, так что общее количество хороших пар равно $n^2 + (2n-1) - 1 = (n+1)^2 - 3$.

Осталось доказать, что хороших пар не может быть больше, чем $(n+1)^2 - 3$. Сделаем это индукцией по n. При $n = 1$ утверждение тривиально, ибо есть всего одна пара детей.

Пусть теперь $n > 1$. Рассмотрим произвольную шеренгу и выберем в ней хорошую пару (a, b), в которой $|a - b|$ — наибольшее; пусть для определённости $a < b$, и ребёнок a стоит левее, чем b. Назовём ребёнка *с прекрасным*, если он образует хорошие пары как с a, так и с b.

Лемма. *Существует не больше двух прекрасных детей.*

Доказательство. Если c прекрасен, то по выбору пары (a, b) имеем $c - a \leqslant b - a$ и $b - c \leqslant b - a$, откуда $a < c < b$. Такой ребёнок c не может стоять между a и b, иначе пара (a, b) не была бы хорошей; значит, любой прекрасный ребёнок стоит либо слева от a, либо справа от b.

Предположим, что есть два прекрасных ребёнка $c_1 < c_2$, стоящих левее a; тогда $a < c_1 < c_2 < b$. Ребёнок c_1 не может стоять между a и c_2, иначе пара (a, c_2) не хорошая; поэтому c_1 стоит левее c_2. Но тогда c_2 стоит между c_1 и b, и пара (c_1, b) — не хорошая, что невозможно. Это противоречие показывает, что левее a стоит не более одного прекрасного ребёнка. Аналогично, не более одного стоит правее b, откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Теперь несложно совершить переход индукции. Выкинув a и b, мы получим, что все хорошие пары, не содержащие a и b, остались хорошими; по предположению индукции, их не больше, чем $n^2 - 3$. Осталось оценить количество хороших пар, содержащих a или b. Это пара (a, b), пары (a, c) и (b, c) для любого прекрасного ребёнка c, и максимум по одной из пар (a, c) и (b, c) для остальных детей c. Всего получаем не более чем $1 + (2n - 2) + 2 = 2n + 1$ пар, откуда общее количество хороших пар не превосходит $(n^2 - 3) + (2n + 1) = (n + 1)^2 - 3$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пару детей a и b, для которых верно утверждение леммы, можно выбирать разными способами. Можно, например, выбрать хорошую пару, в которой дети стоят дальше всего друг от друга. Другой способ — выбрать $a = 1$ и найти наибольшее b такое, что $(1, b)$ — хорошая пара.

Критерии оценивания работ 9 класса

5 задача

- Только пример — 3 балла.
- Только оценка — 2 балла.
- Есть оценка, а также пример без обоснования или с неверным обоснованием — 5 баллов.

6 задача

- За переформулировку задачи в терминах равенства других углов или биссектрис — 0 баллов.
- За нерассмотрение расположения точек баллы не снимаются.
- За отсутствие объяснения вырожденных случаев баллы не снимаются.
- Если задача полностью решена только для случая, когда X находится вне отрезка OH — 7 баллов.
- Доказано, что точка (точки) пересечения CX и AB (BX и AC) лежит на окружности AOX — 1 балл.
- Остальные продвижения не оценивались.

7 задача

- В работе нет содержательных идей по построению нужного примера — 0 баллов.
- Доказательство того, что сумма всех восьми трехчленов равна нулю — 0 баллов.
- Попытки построения примера по значениям трехчленов в трех точках — 2 балла.

8 задача

- Только ответ — 0 баллов.
- Верный ответ и верный пример — 2 балла.
- Верный пример с неверно посчитанным ответом — 1 балл.
- Неточные оценки и неоптимальные примеры баллов не приносят.
- Показано, что для двух детей a и b существует не более одного ребёнка, стоящего между ними и образующего хорошие пары с обоими, или эквивалентное утверждение — 1 балл (суммируется с баллами за пример).