8 класс

8.1. В записи $*+*+*+*+*+*+*+*=**$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

Ответ: $1+2+4+5+7+8+9+0=36$.

Отметим, что приведенный пример единственен с точностью до порядка слагаемых в левой части равенства. Действительно, пусть в правой части стоит число $\overline{ab}$. *Так как сумма десяти различных цифр равна* 45, *то данное равенство можно записать в виде* $45-a-b=10a+b$. *Упрощая его, получим:* $11a+2b=45$.

Простейший перебор показывает, что $a=3$, $b=6$.

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный ответ*

$-$ *приведен неверный ответ (в частности, с повторяющимися цифрами)*

8.2. Про различные числа a и b известно, что $\dfrac{a}{b}+a=\dfrac{b}{a}+b$. Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Ответ: -1.

Решение. Данное равенство можно записать в виде $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=b-a$, откуда $\dfrac{a^2-b^2}{ab}=b-a$ или $\dfrac{(a-b)(a+b)}{ab}=b-a$. Так как числа a и b различны, то разделим обе части равенства на $a-b$, после чего получим: $\dfrac{a+b}{ab}=-1$. Это и есть искомое значение, так как $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные в целом выкладки, но отсутствует обоснование возможности деления на* $(a-b)$

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

8.3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть, для определённости, точка N лежит на прямой AD, а точка Q — на прямой AB (см. рис. 8.3). Тогда диагонали BD и PN прямоугольника $PBND$ равны и пересекаются в их общей середине O. Аналогично, диагонали BD и QM прямоугольника $QBMD$ равны и пересекаются в их общей середине O. Значит, и диагонали PN и QM четырехугольника $PQNM$ равны и пересекаются в их общей середине O. Следовательно, $PQNM$ — прямоугольник.

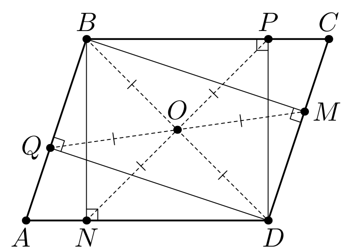

Рис. 8.3

Заметим, что предложенное рассуждение справедливо независимо от того, попадают ли основания высот на стороны параллелограмма или на продолжения сторон.

Возможны и другие способы решения, в частности, использующие вспомогательные окружности и вписанные углы.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное решение*

$\mp$ *доказано только, что указанные точки являются вершинами параллелограмма*

$-$ *разобран только частный случай*

8.4. На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?

Ответ: 2019 и 2025.

Решение. Заметим, что $9-3=6$ и $15-9=6$. Покажем, что в любой момент одно из чисел на доске будет на 6 меньше второго и на 6 больше третьего.

Действительно, пусть это свойство выполнено, и на доске записаны числа $x-6$, x и $x+6$. Если сложить два крайних числа и вычесть среднее, то тройка чисел не изменится. Если сложить первых два числа и вычесть третье, то получится тройка $x-6$, x и $x-12$, а если сложить два последних числа и вычесть первое, то получится тройка $x+12$, x и $x+6$. Во всех случаях указанное свойство сохраняется, поэтому оно будет выполняться после каждого шага. Значит, искомые числа: $2013+6=2019$ и $2019+6=2025$.

Ту же идею решения можно изложить иначе: например, можно показать, что тройки, которые могут получиться, образуют «цепочку», и каждый раз мы делаем по этой цепочке шаг вперёд или шаг назад (или остаёмся на месте).

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ответ и указано без доказательства свойство, которое является инвариантом*

$-$ *приведен только ответ*

8.5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM=\angle CKM=30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: 75°.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BMA = \angle CMK = 60^\circ$, а тогда и $\angle AMK = 60^\circ$ (см. рис. 8.5а). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть AH — перпендикуляр из вершины A на MK. Тогда прямоугольные треугольники AMB и AMH равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH = AB$. Используя это равенство, получим, что прямоугольные треугольники AKH и AKD равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

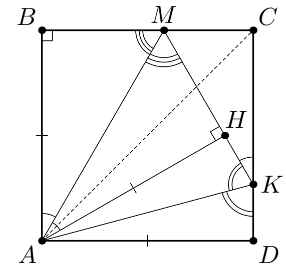

Рис. 8.5а

В приведенном рассуждении используется, что точка H лежит на отрезке MK, а не на его продолжении за точку K. Это действительно так, иначе бы AH пересекал сторону CD в точке X, но тогда $AH > AX > AD$, что противоречит равенству $AH = AD$. За отсутствие этого пояснения у школьника снижать ему оценку не следует.

Второй способ. Диагональ CA квадрата является биссектрисой внутреннего угла треугольника CMK, а луч MA — биссектрисой его внешнего угла, поэтому вершина A — центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, KA также является биссектрисой внешнего угла треугольника CMK, поэтому $\angle AKD = \frac{1}{2}\angle MKD = 75^\circ$.

Третий способ. Продлим отрезок KM до пересечения с прямой AB в точке P (см. рис. 8.5б). Тогда $\angle PMB = \angle CMK = \angle AMB$. Следовательно, прямоугольный треугольники PMB и AMB равны (по катету и острому углу), тогда $PB = AB$, то есть $AP = 2a$, где a — сторона данного квадрата, и $PM = AM$.

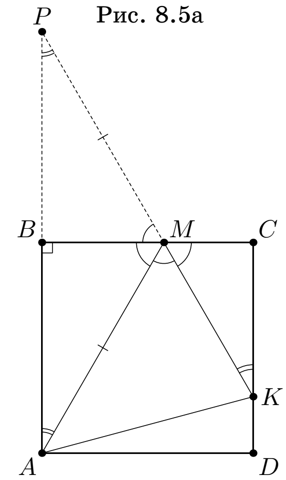

Рис. 8.5б

По свойству катета, противолежащего углу в 30° в прямоугольном треугольнике, $AM = 2BM$ и $MK = 2MC$. Следовательно, $PK = PM + MK = 2(BM + MC) = 2BC = 2a$.

Таким образом, треугольник APK — равнобедренный с углом 30° при вершине P, поэтому его угол при основании равен 75°. Так как $\angle MKD = 150^\circ$, а $\angle MKA = 75^\circ$, то $\angle AKD = 75^\circ$.

Критерии проверки:

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

− *приведен только ответ*

8.6. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)

Решение. Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно шестьдесят — **30** вертикальных и **30** горизонтальных. Если отрезок разграничивает две закрашенные клетки, то будем говорить, что он «окрашен». Заметим, что когда Саша пишет какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до закрашивания этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда Саша приступает к суммированию, окрашены все **60** отрезков, то есть сумма чисел, которые записывает Саша, всегда будет равна **60**.

Отметим, что описывать «материализацию» указанной суммы можно по-разному, например, вместо окрашенного отрезка можно говорить о парах соседних закрашенных клеток и т. п.

Отметим также, что у этой задачи безусловно существует переборное решение, но изложить его в работе физически невозможно.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

− *указано, но не обосновано, что Саша всегда получит число* 60 (*в том числе, путем неполного перебора или демагогических рассуждений типа «по-любому так получится...»*)