Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

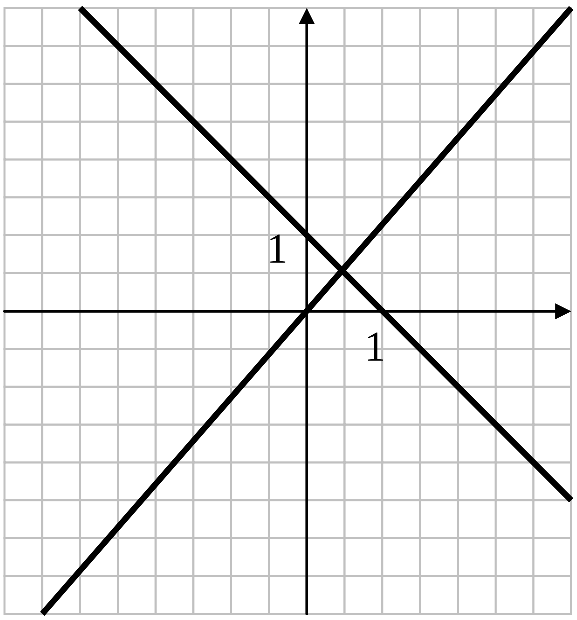
11 класс. Краткие решения.

1. Дорогу длиной 28 километров разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних частей равно 16 км. Найдите длину средней части.

Ответ. *4 км.*

Решение. *Расстояние между серединами крайних частей складывается из половин крайних участков и целого среднего участка, т.е. удвоенное это число равно длине дороги плюс длина среднего участка. Т.о. длина среднего участка = 16*2-28=4.*

2. На координатной плоскости (x, y) изобразите множество всех точек, для которых $y^2 - y = x^2 - x$.

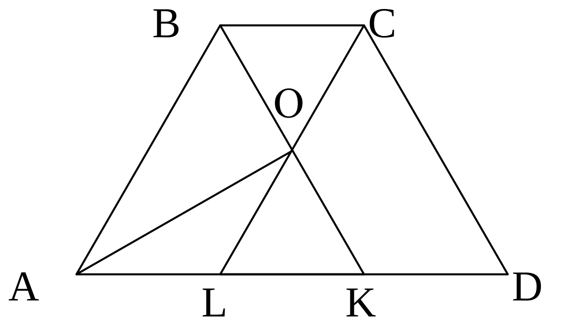
Ответ. 

Решение. $y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$ $(y - x)(y + x) = y - x \Leftrightarrow y = x$ *или* $y + x = 1$

3. Один из углов трапеции равен 60^o. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

Ответ. *1:3*

Решение.



Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60^0$, то $\angle ABC=120^0$. Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к. $\angle ABK=60^0=\angle BAK$, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60^0) и их стороны равны (BO=OK), следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.

4. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2012}-1$ является какой-либо степенью двойки?

Ответ. *Нет, не существует.*

Решение. *Преобразуем:* $n^{2012}-1=(n^{1006})^2-1=(n^{1006}-1)(n^{1006}+1)$. *Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если* $n^{1006}-1=2$, *а* $n^{1006}+1=4$, *но таких натуральных n не существует.*

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=1, \\ x+y+\cos^2 z=2. \end{cases}$$

Ответ: $x=y=1$; $z=\frac{\pi}{2}+\pi n$, *где* $n\in Z$.

Решение. *Из первого уравнения x,y оба положительны или оба отрицательны. Но из второго уравнения x+y>=1, поэтому они оба положительны. Тогда, применив неравенство о средних и использовав первое уравнение системы, получим:* $x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$. *Так как* $\forall z\in R$ $\cos^2 z\geq 0$, *то из второго уравнения следует, что* $x+y=2$ *и* $\cos z=0$. *Откуда* $x=y=1$; $z=\frac{\pi}{2}+\pi n$, *где* $n\in Z$.

Замечание. Можно было не использовать неравенство о средних, а заменить во втором уравнении 2 на 2ху (это можно сделать, т.к. ху=1), перенести в другую часть и выделить полный квадрат.

6. Можно ли сложить сплошную стенку, имеющую форму параллелепипеда с размерами $27 \times 16 \times 15$, а) из кирпичей размером $3 \times 5 \times 7$; б) из кирпичей размером $2 \times 5 \times 6$, если ломать кирпичи нельзя, но можно поворачивать?

<u>Ответ.</u> а) нет; б) нет.

*<u>Решение.</u> а) Заметим, что объем одного кирпича 3*5*7 кратен 7. Из таких кирпичей можно сложить только стенку, объем которой кратен 7. А у нас объем стенки не кратен 7.*

б) Предположим, что выложить можно. Посмотрим на грань стенки размера 27×15. На ней видны следы кирпичей $2 \times 5 \times 6$, т.е. прямоугольники 2×5, 5×6, 2×6 в зависимости от того, какой стороной кирпич примыкает к грани. Таким образом, прямоугольник 27×15 нечетной площади должен быть замощен прямоугольниками 2×5, 5×6, 2×6, площадь каждого из которых четна, – противоречие.