Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

10 класс. Краткие решения.

1. Решите уравнение 1 – (2 – (3 – (...2010 – (2011 – (2012 – x))...))) = 1006.

<u>Ответ.</u> x=2012

<u>Решение.</u> Открыв скобки, получим $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2011 - 2012 + x = 1006$; $-1006 + x = 1006$; $x = 2012$.

2. Дорогу длиной 28 километров разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних частей равно 16 км. Найдите длину средней части.

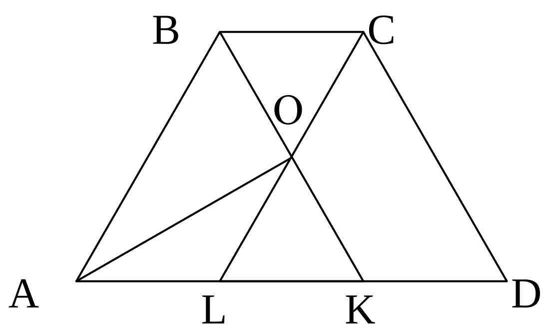
<u>Ответ.</u> 4 км.

*<u>Решение.</u> Расстояние между серединами крайних частей складывается из половин крайних участков и целого среднего участка, т.е. удвоенное это число равно длине дороги плюс длина среднего участка. Т.о. длина среднего участка = 16*2-28=4.*

3. Один из углов трапеции равен 60^{o}. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

<u>Ответ.</u> 1:3

<u>Решение.</u>



Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD. Так как $\angle BAD=60^0$, *то* $\angle ABC=120^0$. *Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и ABC. Т.к.* $\angle ABK=60^0=\angle BAK$, *то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO является медианой в этом треугольнике. Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL – средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и* *параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60^0) и их стороны равны (BO=OK), следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.*

4. Решите числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разные буквы – разные цифры.)

<u>*Ответ.*</u> *4940+5940=10880*

<u>*Решение.*</u> *Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит М – четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2ТБ<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880*

5. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2012} - 1$ является какой-либо степенью двойки?

<u>*Ответ.*</u> *Нет, не существует.*

<u>*Решение.*</u> *Преобразуем:* $n^{2012} - 1 = (n^{1006})^2 - 1 = (n^{1006} - 1)(n^{1006} + 1)$. *Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если* $n^{1006} - 1 = 2$, *а* $n^{1006} + 1 = 4$, *но таких натуральных n не существует.*

6. В пять 15-литровых ведер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается утроить количество воды в любом сосуде, налив в него воду из какого-нибудь одного другого (если воды не хватает, чтобы утроить количество, то наливать из этого ведра нельзя). Какое наибольшее количество воды можно такими действиями собрать в одном ведре?

<u>*Ответ*</u>

Ответ зависит от понимания условия ---
можно ли отливать НЕ всё содержимое ведра
(по сути --- можно ли отмерить ОДИН ЛИТР воды)

А) Если нельзя, то ответ 9 литров
Б) Если можно, то ответ 12 литров

<u>*Решение:*</u>

Вариант А)
Покажем, как собрать в одном из ведер 9 литров:
1, 2, 3, 4, 5 => 1, 6, 3, 0, 5 => 1, 0, 9, 0, 5.

Вариант Б)
Покажем, как собрать в одном из ведер 12 литров:
1, 2, 3, 4, 5 => 1, 6, 3, 4, 1 => 1, 0, 9, 4, 1 => 1, 0, 1, 12, 1

В любом случае, требуется доказать, что это максимальное число (что нельзя получить БОЛЬШЕЕ)

Пусть максимальное число литров равно $n>=9$.

Рассмотрим последнюю операцию с этим ведром (хотя бы одна операция была --- иначе $n<=5$).
Т.к. n – максимальное число литров, то последней операцией не могли отливать из этого ведра
(т.к. иначе до этого там было еще больше), т.е. в него наливали, поэтому n кратно 3.

Во всех ведрах в сумме 15 литров.

Заметим, что после каждого шага есть непустое ведро,
количество литров в котором кратно трём. (*)

Предположим, что $n=15$.
Тогда на предыдущем шаге было ровно два непустых ведра,
в одном из которых 5, а в другом 10 литров.

Но ни одно из этих чисел не кратно 3. Противоречие с (*)

Вариант А)
Предположим, что $n=12$.
Тогда на предыдущем шаге должно было быть два непустых ведра: 4 и 8 литров.

Тогда, в силу условия (*), оставшиеся 3 литра должны были быть в одном ведре.

Но тогда еще на шаг раньше количество воды в ведрах должно было
быть 1, 2, 4, 8, что противоречит условию (*).

Тем самым $n=9$, пример как получить 9 литров приведен выше.

Вариант Б) Тем самым $n=12$, пример как получить 12 литров приведен выше.