Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n > 1$ — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где $k \geqslant n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, ..., $1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n \times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, ..., $1 \times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) — снимается 1 балл.

9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть $ABCD$ — одна из рассматриваемых трапеций, $AD \parallel BC \parallel Ox$ (см. рис. 1). Пусть точки A и C имеют координаты (a, a^2) и (c, c^2).

Легко получить уравнение прямой AC: $(c^2-a^2)x-(c-a)y+(ca^2-ac^2) = 0$, что после сокращения на $c - a \neq 0$ превращается в $y = (a+c)x-ac$. Но $-ac$ равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от A и C до оси Oy). Отсюда $-ac = \frac{k^2}{4}$. Следовательно, прямая AC проходит через фиксированную точку $(0, \frac{k^2}{4})$.

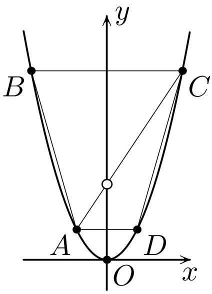

Рис. 1

Замечание. Конечно, утверждение задачи верно для любой параболы (а не только для $y = x^2$).

Комментарий. Верно указана общая точка диагоналей, но не доказано, что через нее они в самом деле проходят — 2 балла.

Задача решена при рассмотрении только одного из двух аналогичных случаев расположения точек (скажем, $a > 0$ разобран, а $a < 0$ — нет) — баллы не снимаются.

Ошибка в арифметике, не повлиявшая на ход решения — снимаются 2 балла.

9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причём в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, и его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила — A или B? (*М. Дидин*)

Ответ. Победила A.

Решение. Пусть в B есть хотя бы один рыцарь r. Тогда r выиграл хотя бы у двоих рыцарей из A, пусть s — один из них. Поскольку s — рыцарь, он правдиво ответил на заданный ему вопрос, то есть он проиграл лжецу. Но из правил следует, что каждый игрок проигрывает не более одного раза, а s проиграл и рыцарю r, и лжецу. Это противоречие показывает, что B состоит лишь из лжецов.

Предположим, что A состоит только из рыцарей. В этом случае каждый из них проиграл какому-то лжецу из команды B, однако каждый лжец в B выиграл не более, чем у одного рыцаря из A, так как он солгал, отвечая на вопрос. Следовательно, разным рыцарям из A соответствуют разные лжецы из B, поэтому в B людей не меньше, чем в A; противоречие.

Таким образом, в команде A есть хотя бы один лжец; обозначим одного из них через ℓ. Тогда ℓ солгал, то есть он не проиграл ни одному лжецу из B — а значит, ни одному игроку из B. Это значит, что ℓ либо выиграл все свои партии, либо до него не дошла очередь. В любом из этих случаев команда A выиграла.

Комментарий. Верное доказательство того, что B состоит из лжецов — 2 балла.

Верное доказательство того, что в A есть хотя бы один лжец — 2 балла.

Указанные баллы суммируются.

9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500. (*С. Берлов*)

Решение. Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна $(1 + 2 + 3 + \ldots + 1000) - 500 > 2 \cdot 100000$, поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определённости справа.

Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; выберем наименьшее n, для которого $S_n > 100000$, так что $S_n > 100000 \geqslant \geqslant S_{n-1}$. Если $S_n \leqslant 100500$, то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь $S_n > 100500$. Докажем, что тогда нам подходит сумма $500 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 500 + S_{n-1}$. Действительно, поскольку $a_n \leqslant 1000$, имеем $500 + S_{n-1} = 500 + + S_n - a_n > 500 + 100500 - 1000 = 100000$. С другой стороны, $500 + S_{n-1} \leqslant 500 + 100000 = 100500$, что и требовалось.

Комментарий. Алгоритм выбора нужного отрезка чисел, который не работает хотя бы для одной перестановки чисел от 1 до 1000, признается не работающим и оценивается в 0 баллов.

В случае верного алгоритма выбора нужного отрезка оценка может быть снижена на 1, 2 или 3 балла, за пробелы в обосновании того, что алгоритм действительно работающий.

9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через O середину дуги DBE окружности, описанной около треугольника DBE. Прямая BO является внешней биссектрисой в треугольнике DBE, а следовательно, и в треугольнике ABC. Но треугольник ABC равнобедренный, поэтому $BO \parallel AC$.

Заметим далее, что $\angle EOD = \angle EBD = \angle ABC$ (см. рис. 2). Таким образом, в равнобедренных треугольниках EOD и ABC равны углы при вершинах, а также основания, поэтому равны и сами треугольники. Отсюда, во-первых, $BA = BC = OE = = OD$. Во-вторых, расстояние от точки O до прямой DE равно расстоянию от точки B до AC, а последнее равно расстоянию от O до AC (поскольку $BO \parallel AC$). Значит, точка O лежит на биссектрисе угла между прямыми DE и AC.

Из условия $\angle DEF = \angle CFE$ вытекает, что эта биссектриса является серединными перпендикуляром к отрезку EF. Таким образом, $OF = OE = OD$. Иными словами, точка O — центр окружности, описанной около треугольника DFE. Следовательно, $2\angle DFE = \angle DOE = \angle ABC$, что и требовалось.

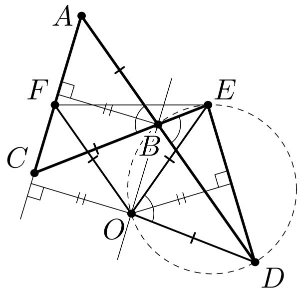

Рис. 2

Второе решение. Для начала сделаем замечание. Пусть на прямой AC выбраны точки A' и C' такие, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ и $\angle DA'C' = \angle EC'A'$; тогда $A' = A$ и $C' = C$. Действительно, если это не так и, скажем, точки A' и C' лежит на луче CA (см. рис. 3), то $\angle DA'C' < \angle DAC = \angle ECA < \angle EC'A'$, что невозможно.

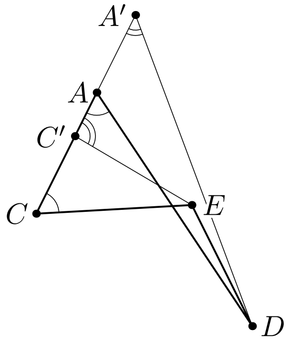

Рис. 3

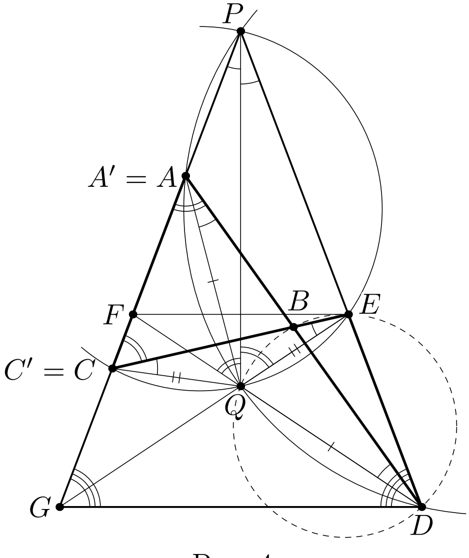

Рис. 4

Построим теперь такие точки. Пусть прямые DE и AC пересекаются в точке P; для определённости, пусть P лежит на луче DE. Выберем на прямой AC точку G такую, что $EF \parallel DG$. Тогда $DEFG$ — трапеция с равными углами при основании; следовательно, $FG = DE = AC$ и $DF = EG$. Пусть диагонали

DF и EG пересекаются в точке Q. Пусть, наконец, описанные окружности треугольников PDQ и PEQ вторично пересекают прямую AC в точках A' и C' соответственно (см. рис. 4).

Поскольку PQ — биссектриса угла APD, получаем $QA' = QD$ и $QC' = QE$. Кроме того, $\angle DQA' = 180^\circ - \angle DPG = \angle EQC'$. Значит, $\angle DQE = \angle A'QC'$; поэтому треугольник $A'QC'$ получается из DQE поворотом вокруг точки Q. Отсюда нетрудно получить, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. Далее, из вписанности и симметрии имеем

$$\angle EC'P = \angle EQP = \angle FQP = 180^\circ - \angle DQP = \angle DA'C'.$$

По замечанию выше получаем, что $A = A'$ и $C = C'$.

Осталось завершить решение. Имеем $\angle ADQ = \angle APQ = \angle CEQ$. Отсюда следует, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности. Значит, $\angle ABC = \angle DBE = \angle DQE = \angle QEF + \angle QFE = 2\angle DFE$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $DE \parallel AC$, то точка F совпадает с A, что невозможно. Поэтому можно считать, что прямые DE и AC пересекаются. Кроме того, можно показать, что в условиях задачи P всегда лежит именно на луче DE.

Третье решение. Как и в предыдущем решении, достроим равнобокую трапецию $DEFG$ с точкой пересечения диагоналей Q. Как мы видели в том же решении, достаточно доказать, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности.

Выберем точку T так, что четырёхугольник $ACTD$ — параллелограмм (см. рис. 5). Тогда $FGTD$ — также параллелограмм, ибо $\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FG}$. Значит, $GT = FD = GE$ и $\angle TCA = 180^\circ - \angle DAC = 180^\circ - \angle ECA$; первое равенство означает, что G лежит на серединном перпендикуляре к ET, а второе — что CG это внешняя биссектриса угла ECT. Но, как известно, эта внешняя биссектриса вторично пересекает описанную окружность треугольника ECT в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к ET; значит, G и есть эта точка, и точки C, G, T, E лежат на одной окружности.

Наконец, из этой окружности и двух параллелограммов получаем $\angle BDQ = \angle ADF = \angle CTG = \angle CEG = \angle BEQ$, то есть точки D, E, B и Q лежат на одной окружности; это мы и хотели доказать.

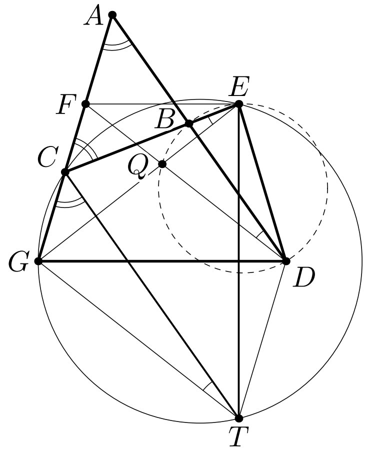

Рис. 5

Комментарий. Общие замечания. В этой задаче рекомендуется не снижать баллы за использование расположения точек, не влияющее существенно на ход решения — например, на расположение точки P пересечения прямых DE и AC, отсутствие разбора случая $DE \parallel AC$ и т. п.

Далее приведены критерии оценивания для работ, следующих по одному из предложенных решений. Остальные решения стоит оценивать по аналогии. Баллы по разным решениям не складываются друг с другом. Баллы в рамках одного решения могут складываться только если это указано явно.

Первое решение.

(1.1) Только построена точка O — 0 баллов.

(1.2) Показано, что треугольники ABC и DOE равны — 1 балл.

(1.3) Показано, что O равноудалена от прямых AC и DE — 3 балла.

(1.4) Доказано, что $OE = OF$ — 4 балла.

Второе решение.

(2.1) Только построена точка Q — 0 баллов.

(2.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности — 1 балл.

(2.3) Высказано предположение, что треугольники AQC и DQE равны — 1 балл (может суммироваться с (2.2)).

(2.4) Из этого предположения выведено утверждение задачи — 2 балла (**не** суммируется с (2.2)).

(2.5) Только доказано, что треугольники AQC и DQE равны — 4 балла.

Третье решение.

(3.1) Только построена точка Q — 0 баллов.

(3.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности — 1 балл.

(3.3) Построена точка T из решения, и задача сведена к доказательству того, что точки C, G, E, T лежат на одной окружности — 3 балла.