Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n > 1$ — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где $k \geqslant n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n \times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) — снимается 1 балл.

11.2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \ldots, 2024$ обозначим $p_i = (x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) \ldots (x_i - \frac{1}{x_i})$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 2023.

Первое решение. Заметим, что число $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$ не может быть натуральным. Действительно, если $x_1 = 1$, то $p_1 = 0$, если же $x_1 > 1$, то p_1 — не целое, как разность целого и нецелого чисел. Поэтому натуральными могут быть не более 2023 чисел p_i.

Покажем, как получить 2023 натуральных числа. Если $x_1 = 2, x_2 = 3$, то $p_2 = (x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) = (2 - \frac{1}{2})(3 - \frac{1}{3}) = 4$. При $n > 2$ положим $x_{n+1} = p_n > x_n$. Тогда $p_{n+1} = p_n(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}) = p_n^2 - 1$ также будет натуральным.

Второе решение. Приведем другой пример последовательности, дающий 2023 натуральных числа. Положим $x_1 = 2, x_2 = 3, \ldots, x_{2024} = 2025$. Тогда $x_k - \frac{1}{x_k} = k + 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k(k+2)}{k+1}$. Тогда $p_i = \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{i(i+2)}{i+1} = i!(i+2)/2$, что является натуральным числом при $i \geqslant 2$.

Замечание. Подходят любые 2024 последовательных натуральных числа, больших 1.

Комментарий. Ответ без обоснования — 0 баллов.

Только оценка — 1 балл.

Только пример — 6 баллов.

Приведён верный пример последовательности, но не обосновано, что она подходит — не более 5 баллов.

11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори? (*П. Кожевников*)

Ответ. 50.

Решение. Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

Первый способ. *Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдётся), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

Стратегия Бори. Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

Обоснование правильности стратегий. Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьется того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня — что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда чётно. Действительно, после окончания игры пройдём полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определённости с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К—С—К—С—...—К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К—С столько же, сколько пар вида С—К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

Второй способ. Разобьём все отмеченные точки на 50 пар соседей: $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$.

Стратегия Бори. Если своим ходом Аня красит точку в паре P_i, то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре P_i в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара P_i будет покрашена в один цвет. Значит, из 100 пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем $100 - 50 = 50$.

Стратегия Ани. Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре P_i с нечётным номером i она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре P_i с чётным номером i — синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдётся хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).

Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре P_i соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой ещё не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара P_j, в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар P_i будет либо две покрашенных точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре P_i, что ей и требовалось.

Комментарий.

Только ответ — 0 баллов.

1) Предъявлена верная стратегия за Борю, гарантирующая, что число разноцветных пар не больше 50 — 2 балла.

1') Обосновано, что эта Борина стратегия работает — 1 балл.

2) Предъявлена верная стратегия за Аню, гарантирующая, что число разноцветных пар не меньше 50 — 2 балла.

2') Обосновано, что эта Анина стратегия работает — 2 балла (если при верной Аниной стратегии обосновано лишь, что она может обеспечить себе 49 пар, то считается, что обоснование отсутствует, и эти баллы не ставятся).

Баллы за указанные продвижения суммируются. Если предъявленная стратегия за одного из игроков не работает хотя бы в одном частном случае развития игры, такая стратегия признается не работающей и оценивается в 0 баллов.

11.4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$ соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$. (*М. Евдокимов*)

Решение. Покажем, что $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$. Требуемое в условии равенство получается вычитанием из обеих частей этого равенства площади серого треугольника с вершиной в точке Z, а также добавлением площадей двух серых треугольников, примыкающих к хордам A_2A_3 и A_7A_8 (см. рис. 9). Заметим, что $\angle A_2ZA_8 + \angle A_3ZA_7 = \frac{6}{10} \cdot 180^\circ + \frac{4}{10} \cdot 180^\circ = 180^\circ$, поэтому синусы этих углов равны. Поэтому достаточно доказать, что $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$. Покажем, что оба произведения равны $XZ \cdot XY$. Для этого достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

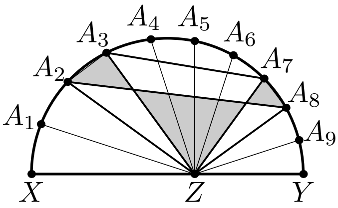

Рис. 9

Лемма. *Пусть P и Q — две точки на полуокружности с диаметром XY, точка Z лежит на отрезке XY и $\angle XZP = \angle YZQ$. Тогда $ZP \cdot ZQ = ZX \cdot ZY$.*

Доказательство. Отметим точку R, симметричную Q относительно XY. Тогда четырехугольник $XPYR$ вписан в окружность с диаметром XY. Также в силу симметрии $ZQ = ZR$ и $\angle XZP = \angle QZY = \angle RZY$, то есть точки P, Z, R лежат на одной прямой. Значит, Z — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $XPYR$, поэтому $XZ \cdot XY = PZ \cdot ZR = PZ \cdot ZQ$. Таким образом, лемма доказана, что завершает решение задачи. □

Комментарий.

(А1) Задача сведена к равенству $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$ — 1 балл.

(A2) Задача сведена к равенству произведений $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$ — 2 балла.

(A3) В дополнении к A2. есть гипотеза, что оба произведения равны $ZX \cdot ZY$ — 3 балла.

(B) В работе сформулирована лемма из решения — 1 балл.

(C) В работе доказана лемма из решения — 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.

11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

(*М. Антипов*)

Решение. Обозначим $k = -a, \ell = a+b$, и перепишем уравнение в виде:

$$t^4 - kt^3 + (k+\ell)t^2 - 2\ell t + \ell = 0.$$

Заметим, что $k = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 > 0$ и $\ell = t_1t_2t_3t_4 > 0$.

Дальше, перепишем уравнение в виде

$$t^4 + \ell(t-1)^2 = kt^2(t-1),$$

откуда сразу следует, что все его корни строго больше 1.

Добавим к каждой части $2\sqrt{\ell}\, t^2(t-1)$, уравнение превратится в

$$(t^2 + u(t-1))^2 = v^2t^2(t-1),$$

где $u = \sqrt{\ell}, v = \sqrt{k + 2\sqrt{\ell}}$. Если обозначить $s = \sqrt{t-1}$, то получим однородное уравнение $t^2 - vst + us^2 = 0$, из которого следует, что $t/s = c_{1,2}$, где $c_1 = (v - \sqrt{v^2 - 4u})/2$, $c_2 = (v + \sqrt{v^2 - 4u})/2$.

Дальше, каждое из уравнений $t/s = c_i$ можно переписать в виде $t^2 - c_it + c_i = 0$. Эти уравнения различны, и каждое из них имеет два различных положительных корня, так как исходное уравнение имеет 4 различных положительных корня. Из этого следует, что $4 < c_1 < c_2$.

Так как функция $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$ строго убывает при $x > 4$ (это несложно показать, например, взяв производную), то $c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2} < c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}$.

Теперь уже легко вычислить и упорядочить t_i:

$$t_1 = \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2} < t_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} <$$

$$< t_3 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} < t_4 = \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2},$$

значит, $t_1 t_4 = c_2 > c_1 = t_2 t_3$.

Замечание. Из доказательства следует, что оценка точна, то есть разницу $t_1 t_4 - t_2 t_3$ можно сделать сколь угодно близко к 0.

Комментарий. Неравенство $t_1 < t_2$ не обосновано — снимаются 2 балла.