Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{y^2+y+1}+\dfrac{1}{z^2+z+1}=4$. Могут ли слова Сергея быть правдой? (*П. Кожевников, фольклор*)

Ответ. Не могут.

Решение. Заметим, что $4(x^2+x+1)=(4x^2+4x+1)+3=(2x+1)^2+3\geqslant 3$, причем равенство достигается только при $x=-1/2$. Тогда первое слагаемое $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ всегда положительно и не превосходит $4/3$. То же верно и для других слагаемых. Значит, левая часть уравнения Сергея не превышает $4/3\cdot 3=4$, причем равенство достигается лишь при $x=y=z=-1/2$, значит, равенство невозможно для различных x, y, z.

Замечание. Неравенство $\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqslant 4/3$ может быть доказано по-разному, например, исследованием квадратичной функции $f(x)=x^2+x+1$.

Комментарий. Верно доказано неравенство $\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqslant 4/3$ или верно найдена область значений функции $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ — 5 баллов.

10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой? (*П. Кожевников*)

Ответ. Могли.

Решение. Примером могут служить числа вида $\overline{A0}$, $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\overline{A3}$, $\overline{A4}$, $\overline{A5}$, $\overline{A6}$, $\overline{A7}$, $\overline{A8}$, $\overline{A9}$, где $A=1023456789$.

Замечание 1. Ясно, что в качестве A можно взять любое число, состоящее из одинакового количества цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Замечание 2. На самом деле, можно показать, что все возможные примеры устроены так, как указано в замечании 1.

Комментарий. Есть ответ без предъявления примера — 0 баллов.

Есть верный пример — 7 баллов.

10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A=\angle C=90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (см. рис. 3). По условию, четырехугольник $AKLD$ — вписанный. Значит, $\angle KLD = 180^\circ - \angle KAD = 90^\circ$. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL \parallel AC$, поэтому $LD \perp AC$. Пусть отрезки DL и AC пересекаются в точке D_1.

Опустим из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую AC. Тогда $BB_1 \parallel LD_1$, значит, D_1 — середина отрезка CB_1 по теореме Фалеса. Кроме того, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, построенную на отрезке BD как на диаметре, обозначим центр этой окружности через O. Вновь по теореме Фалеса проекции точек B и D на прямую AC находятся на равном расстоянии от проекции точки O, то есть от середины отрезка AC. Это означает, что $CD_1 = AB_1$. Итого, $AB_1 = CD_1 = B_1D_1$. Значит, B_1N — средняя линия в треугольнике AD_1B, поэтому $B_1N \parallel DD_1$ и $\angle D_1B_1N = 90^\circ$. Поскольку еще и NM — средняя линия треугольника ACD, то $NM \parallel AC$ и $\angle B_1NM = 90^\circ$. Следовательно, точки B, C, N и M лежат на окружности с диаметром BM, что и требовалось доказать.

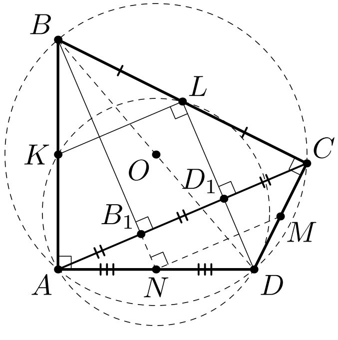

Рис. 3

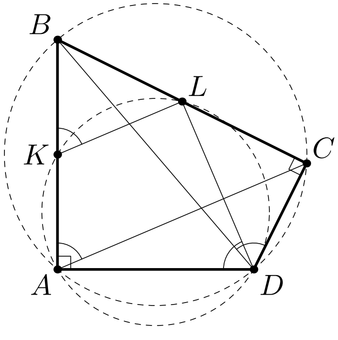

Рис. 4

Второе решение. Воспользуемся обозначениями из первого решения. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL \parallel AC$. Отсюда и из вписанности четырехугольника $ABCD$, мы получаем равенства углов: $\angle BDC = \angle BAC = \angle BKL = 180^\circ - \angle AKL$ (см. рис. 4). Таким образом, вписанность четырехугольника $AKLD$ равносильна равенству углов $\angle ADL = \angle BDC$, что эквивалентно равенству $\angle ADB = \angle CDL$. Последнее равенство равносильно подобию треугольников LCD и BAD, что эквивалентно равенству отношений их катетов $\frac{LC}{CD} = \frac{AB}{AD}$. Домножая на знаменатели, получаем соотношение $AB \cdot CD = \frac{1}{2} AD \cdot BC$. Рассуждая аналогично, получаем, что это же равенство равносильно вписанности четырехугольника $BNMC$, что и требовалось.

Комментарий. Получено $LD \perp AC$ и/или понято, что $BN \perp AC$ (или, эквивалентно, $LD \parallel BN$) достаточно для решения — 1 балл.

Получено подобие $\triangle LCD \sim \triangle BAD$ и/или понято, что $\triangle BAN \sim \triangle BCD$ достаточно для решения — 2 балла.

Баллы за указанные продвижения не суммируются. За получение других начальных продвижений — различных соотношений, полученных из счёта углов, параллельности $KL \parallel AC$ и т.д. — баллы не добавляются.

10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.

(*А. Чиронов, И. Богданов*)

Ответ. $(1, 1, 1)$.

Решение. Видим, что $a = b = c = 1$ удовлетворяет условию. Далее будет доказано, что других ответов нет.

1) Предположим, что $s = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ делится на pqr, где $p = a + bc$, $q = b + ca$, $r = c + ab$ (в частности, это следует из условия, если дополнительно предполагать, что p, q, r различны).

Заметим, что один из трех сомножителей a^2+1, b^2+1, c^2+1 не может делиться на произведение двух из чисел p, q, r, так как он меньше этого произведения. Действительно, рассмотрим, например, $pq = (a+bc)(b+ca)$. Из раскрытия скобок видим, что $pq > c^2(ab) + ab \geqslant c^2 + 1$, $pq > b^2c + ab \geqslant b^2 + 1$ и аналогично $pq > a^2 + 1$. Значит, каждый из сомножителей $a^2 + 1$, $b^2 + 1$,

c^2+1 должен делиться ровно на одно из чисел p, q, r. Пусть, для определенности, a — наименьшее из чисел a, b, c. Тогда $a^2 \leqslant bc$ и $1 \leqslant a$, поэтому a^2+1 может делиться на $p = bc + a$ только в случае $a^2 = bc$ и $a = 1$, т.е в случае $a = b = c = 1$. Далее, $a^2 \leqslant ac$ и $1 \leqslant b$, поэтому a^2+1 может делиться на $q = ac + b$ только в случае $a^2 = ac$ и $b = 1$, т.е в случае $a = b = c = 1$. Аналогично, a^2+1 может делиться на $r = ab + c$ только при $a = b = c = 1$.

2) Пусть какие-то два из трех чисел p, q, r совпадают, скажем, $p = q$. Тогда $0 = q - p = b + ca - a - bc = (a - b)(c - 1)$. Значит, либо $a = b$, либо $c = 1$. Первый случай возможен лишь при $a = b = 1$, иначе $p = a + bc = a + ac = a(a + c)$ — составное число, про дает противоречие. Значит, в любом случае среди a,b,c присутствует единица, скажем, $c = 1$.

Тогда наши данные простые числа — это $p = a + b$, $q = a + b$ и $r = ab+1$, и они должны быть делителями $s = 2(a^2+1)(b^2+1)$. Если хотя бы одно из чисел a, b больше 1, то $p > 2$ и на $p = a+b$ обязан делиться хотя бы один из сомножителей a^2+1 и b^2+1. А поскольку разность $(a^2+1)-(b^2+1) = (a-b)(a+b)$ делится на $p = a + b$, получаем, что оба числа a^2+1, b^2+1 делятся на p. Тогда если r отлично от $p = q$, то s делится на pqr, что разобрано в случае 1).

Остается вариант $p = q = r$. Рассуждаем как в предыдущем случае и получаем, что хотя бы два из трех чисел a, b, c обязаны равняться 1. Пусть, например, $a = b = 1$, $p = q = r = c + 1$, $s = 4(c^2+1)$. Случай $c = 1$ уже был ранее. Если $c > 1$, то $c+1$ — нечетное простое, значит c^2+1 должно делиться на $c+1$. Отсюда $(c^2+1)-(c+1) = c(c-1)$ должно делиться на $c+1$. Но это невозможно, так как $0 < c-1 < c < c+1$ и $c+1$ — простое.

Комментарий. Только верный ответ (возможно, с проверкой) — 0 баллов.

Верно разобран случай различных p, q, r, либо случай делимости s на pqr (при этом, возможно, делимость s на pqr ошибочно выведена из условия) — 4 балла.

Верно разобран случай, два из трех чисел p, q, r равны друг другу, а третье не равно им — 2 балла.

Верно разобран случай $p = q = r$ — 1 балл.

Баллы за указанные продвижения суммируются. За рассмотрение других частных случаев, например $a = b = c$ или $a = b$, $c = 1$ баллы не добавляются.

10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей? (*Я. Шубин, Г. Шубин*)

Ответ. 1012.

Решение. Положим $n = 1012$.

Оценка. Людей обозначим вершинами, номер вершины будет означать ответ соответствующего человека, а если пара людей дружит, то проведем ребро между соответствующими вершинами.

Пусть A — множество всех людей, которые назвали числа от 0 до $n-1$, а B — множество всех людей, которые назвали числа от n до $2n-1$. Пусть d_i — степень вершины i (т.е. количество ребер, выходящих из вершины i). Тогда по условию $d_i = i$, если i — рыцарь, и $|d_i - i| = 1$ в противном случае. Пусть в множестве A ровно x лжецов, а в множестве B — ровно y.

Оценим количество E ребер между людьми из разных множеств A и B.

С одной стороны, E не больше суммы степеней вершин множества A, откуда

$$E \leqslant d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + x = \frac{(n-1)n}{2} + x.$$

С другой стороны, из каждой вершины i множества B не более $n-1$ ребер идет в вершины множества B, и значит, не менее $d_i - (n-1)$ ребер идет в вершины множества A. Отсюда

$$E \geqslant d_n + d_{n+1} + \ldots + d_{2n-1} - n(n-1) \geqslant$$
$$\geqslant n + (n+1) + \ldots + (2n-1) - y - n(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - y.$$

Получаем неравенство

$$\frac{(n-1)n}{2} + x \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - y,$$

откуда $x + y \geqslant n$. Это означает, что всего лжецов не менее n.

Пример. Как и прежде, номер человека будет означать его ответ. Возьмем два множества людей: $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $D = \{n, n+1, \ldots, 2n-1\}$. Пусть в множестве C никакие двое людей не дружат друг с другом, а в множестве D — любые двое дружат. Далее, пусть человек $i \in C$ и $j \in D$ дружат тогда и только тогда, когда $i + j \geqslant 2n - 1$. Тогда у человека $i \in C$ всего $i + 1$ друг: $2n-1, 2n-2, \ldots, 2n-i-1$. У человека $j \in D$ будет всего j друзей: это $j - n + 1$ людей $n-1, n-2, \ldots, 2n-j-1$ из множества C и все люди множества D, кроме него самого. При этом все люди в C — лжецы, а в D — рыцари. Видим, что все условия задачи выполняются.

Комментарий.

Только ответ — 0 баллов.

Приведен верный пример с обоснованием, что он работает — 2 балла.

Только приведена оценка, т.е. доказано, что менее 1012 лжецов быть не может — 5 баллов.