7 класс

Задача 7.1.1. Пусть A, B, C, D, E, F, G, H — различные цифры от 0 до 7 — удовлетворяют равенству

$$\overline{ABC} + \overline{DE} = \overline{FGH}.$$

Найдите $\overline{DE}$, если $\overline{ABC} = 146$.

(Запись $\overline{ABC}$ означает трёхзначное число, состоящее из цифр A, B, C, аналогично устроены числа $\overline{FGH}$ и $\overline{DE}$.)

Ответ: 57.

Решение. Подставим вместо $\overline{ABC}$ число 146 и запишем пример в столбик:

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 6 \\ +\quad D\ E \\ \hline F\ G\ H \end{array}$$

В качестве D, E, F, G, H могут использоваться только цифры $0, 2, 3, 5, 7$. Рассмотрим E.

- Если $E = 0$, то $H = 6$ — но это противоречит тому, что $C = 6$.
- Если $E = 2$, то $H = 8$ — но такой цифры у нас нет.
- Если $E = 3$, то $H = 9$ — но такой цифры у нас нет.
- Если $E = 5$, то $H = 1$ — но это противоречит тому, что $A = 1$.

Методом исключения понимаем, что $E = 7$:

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 6 \\ +\quad D\ 7 \\ \hline F\ G\ 3 \end{array}$$

Так как числа не могут начинаться с нуля, ему может соответствовать только одна цифра — это цифра G:

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 6 \\ +\quad D\ 7 \\ \hline F\ 0\ 3 \end{array}$$

Теперь нетрудно полностью восстановить пример:

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 6 \\ +\quad 5\ 7 \\ \hline 2\ 0\ 3 \end{array}$$

□

Вариант 7.1.2. Пусть A, B, C, D, E, F, G, H — различные цифры от 0 до 7 — удовлетворяют равенству

$$\overline{ABC} + \overline{DE} = \overline{FGH}.$$

Найдите $\overline{DE}$, если $\overline{ABC} = 147$.

(Запись $\overline{ABC}$ означает трёхзначное число, состоящее из цифр A, B, C, аналогично устроены числа $\overline{FGH}$ и $\overline{DE}$.)

Ответ: 56.

Вариант 7.1.3. Пусть A, B, C, D, E, F, G, H — различные цифры от 0 до 7 — удовлетворяют равенству

$$\overline{ABC} + \overline{DE} = \overline{FGH}.$$

Найдите $\overline{DE}$, если $\overline{ABC} = 157$.

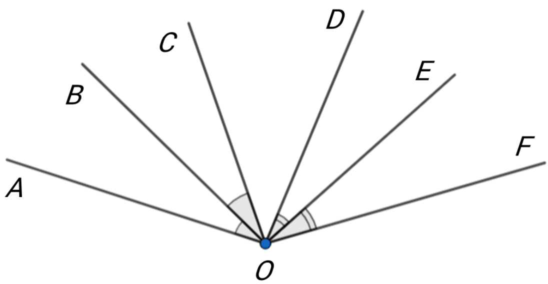
(Запись $\overline{ABC}$ означает трёхзначное число, состоящее из цифр A, B, C, аналогично устроены числа $\overline{FGH}$ и $\overline{DE}$.)

Ответ: 46.

Задача 7.2.1. На рисунке изображены лучи OA, OB, OC, OD, OE, OF такие, что:

- OB — биссектриса угла AOC;
- OE — биссектриса угла DOF;
- $\angle AOF = 146°$, $\angle COD = 42°$.

Сколько градусов составляет угол BOE?



Ответ: 94°.

Решение. Найдём сумму углов AOB и EOF:

$$\angle AOB + \angle EOF = \frac{\angle AOC}{2} + \frac{\angle DOF}{2} = \frac{\angle AOF - \angle COD}{2} = \frac{146° - 42°}{2} = 52°.$$

Теперь нетрудно найти искомый угол:

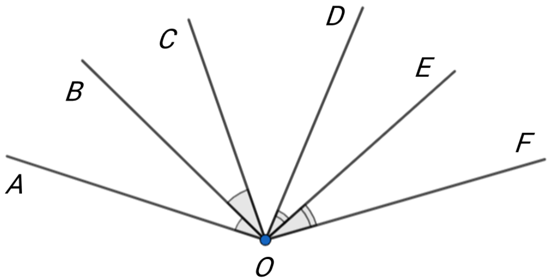
$$\angle BOE = \angle AOF - (\angle AOB + \angle EOF) = 146° - 52° = 94°.$$

□

Вариант 7.2.2. На рисунке изображены лучи OA, OB, OC, OD, OE, OF такие, что:

- OB — биссектриса угла AOC;
- OE — биссектриса угла DOF;
- $\angle AOF = 142°$, $\angle COD = 42°$.

Сколько градусов составляет угол BOE?

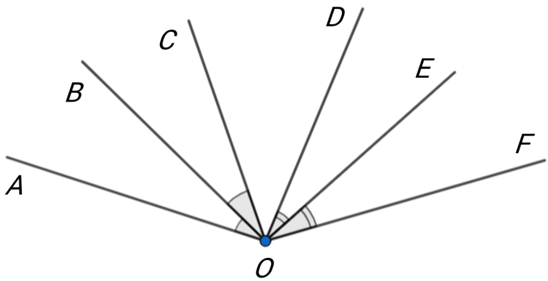


Ответ: 92°.

Вариант 7.2.3. На рисунке изображены лучи OA, OB, OC, OD, OE, OF такие, что:

- OB — биссектриса угла AOC;
- OE — биссектриса угла DOF;
- $\angle AOF = 148°$, $\angle COD = 44°$.

Сколько градусов составляет угол BOE?



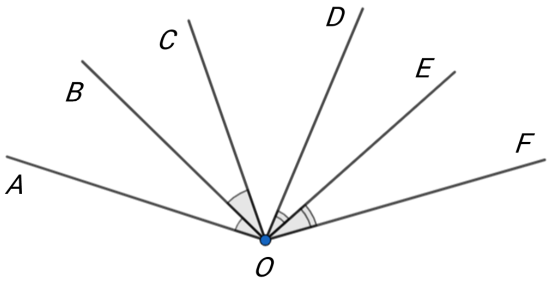
Ответ: 96°.

Вариант 7.2.4. На рисунке изображены лучи OA, OB, OC, OD, OE, OF такие, что:

- OB — биссектриса угла AOC;

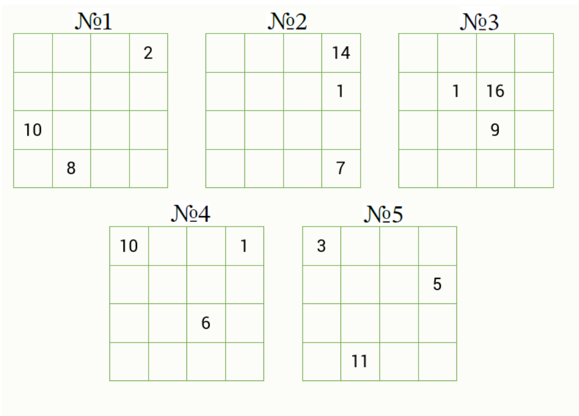
- OE — биссектриса угла DOF;
- $\angle AOF = 148°$, $\angle COD = 48°$.

Сколько градусов составляет угол BOE?



Ответ: 98°.

Задача 7.3.1. Петя вписал все натуральные числа от 1 до 16 в клетки таблицы 4×4 так, что любые два числа, отличающиеся на 1, оказались в соседних по стороне клетках. Затем он стёр некоторые числа. Выберите все картинки, которые могли получиться:



Ответ: картинки №3 и №4.

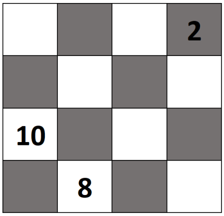
Решение. Покажем, как можно расставить числа на картинках №3 и №4.

3	2	15	14
4	1	16	13
5	8	9	12
6	7	10	11

10	9	2	1
11	8	3	4
12	7	6	5
13	14	15	16

Теперь докажем, что расстановки на остальных картинках невозможны.

Для начала рассмотрим картинку №1. Применим для неё шахматную раскраску.



Если подобная расстановка чисел возможна, то

- раз число 2 находится в чёрной клетке, то число 3 находится в белой клетке;
- раз число 3 находится в белой клетке, то число 4 находится в чёрной клетке;
- раз число 4 находится в чёрной клетке, то число 5 находится в белой клетке;
- …
- раз число 7 находится в белой клетке, то число 8 находится в чёрной клетке — но это противоречит условию.

Теперь рассмотрим картинку №2.

			14
			1
			7

Обратим внимание на число 14. Если бы такая расстановка была возможна, то рядом с числом 14 стояли бы числа 13 и 15, но рядом с ним есть только одно свободное место. Противоречие.

Теперь рассмотрим картинку №5.

3			
			5
	11		

Если бы такая расстановка была возможна, то рядом с числом 4 стояли бы числа 3 и 5, но такое, очевидно, невозможно. Противоречие. □

Вариант 7.3.2. Петя вписал все натуральные числа от 1 до 16 в клетки таблицы 4×4 так, что любые два числа, отличающиеся на 1, оказались в соседних по стороне клетках. Затем он стёр некоторые числа. Выберите все картинки, которые могли получиться:

№1

			3
11			
		5	

№2

7		1	14

№3

	10		
8			
			2

№4

		1	
	9	16	

№5

			10
	6		
			1

Ответ: Картинки №4 и №5.

Вариант 7.3.3. Петя вписал все натуральные числа от 1 до 16 в клетки таблицы 4×4 так, что любые два числа, отличающиеся на 1, оказались в соседних по стороне клетках. Затем он стёр некоторые числа. Выберите все картинки, которые могли получиться:

№1

14	1		7

№2

	5		
			11
3			

№3

1			
		6	
10			

№4

2			
			8
		10	

№5

	16	9	
	1		

Ответ: Картинки №3 и №5.

Вариант 7.3.4. Петя вписал все натуральные числа от 1 до 16 в клетки таблицы 4×4 так, что любые два числа, отличающиеся на 1, оказались в соседних по стороне клетках. Затем он стёр некоторые числа. Выберите все картинки, которые могли получиться:

№1

	6		
1			10

№2

	9		
	16	1	

№3

7			
1			
14			

№4

		11	
5			
			3

№5

		8	
			10
2			

Ответ: Картинки №1 и №2.

Задача 7.4.1. Братья Лёша и Саша решили добраться из дома до скейт-парка. Они вышли одновременно, но Лёша пошёл пешком со скейтом в руках, а Саша поехал на скейте. Известно, что Саша едет на скейте в 3 раза быстрее, чем Лёша идёт пешком со скейтом. Через некоторое время они одновременно поменяли способ передвижения: Лёша поехал на скейте, а Саша пошёл пешком. При этом скорость движения каждого из них изменилась в 2 раза: у Лёши увеличилась, а у Саши уменьшилась. Оказалось, что до скейт-парка они добрались одновременно. Сколько метров проехал на скейте Саша, если расстояние от дома до скейт-парка составляет 3300 метров?

Ответ: 1100.

Решение. Пусть v — скорость Лёши пешком, тогда $3v$ — скорость Саши на скейте. После смены способа передвижения скорость каждого из ребят изменилась в 2 раза, поэтому $2v$ — скорость Лёши на скейте, а $1{,}5v$ — скорость Саши пешком. Получается, что на втором участке пути скорость Лёши была в $\frac{2v}{1{,}5v} = \frac{4}{3}$ раза больше скорости Саши.

Пусть Лёша прошёл пешком x метров, тогда Саша проехал на скейте $3x$ метров. Затем Лёша преодолел свои оставшиеся $(3300 - x)$ метров, а Саша — $(3300 - 3x)$ метров. В задаче требуется найти $3x$. Зная отношение скоростей ребят после смены способа передвижения, составляем пропорцию:

$$\frac{3300 - x}{3300 - 3x} = \frac{4}{3};$$
$$9900 - 3x = 13200 - 12x;$$
$$9x = 3300;$$
$$3x = 1100.$$

□

Вариант 7.4.2. Братья Лёша и Саша решили добраться из дома до скейт-парка. Они вышли одновременно, но Лёша пошёл пешком со скейтом в руках, а Саша поехал на скейте. Известно, что Саша едет на скейте в 3 раза быстрее, чем Лёша идёт пешком со скейтом. Через некоторое время они одновременно поменяли способ передвижения: Лёша поехал на скейте, а Саша пошёл пешком. При этом скорость движения каждого из них изменилась в 2 раза: у Лёши увеличилась, а у Саши уменьшилась. Оказалось, что до скейт-парка они добрались одновременно. Сколько метров проехал на скейте Саша, если расстояние от дома до скейт-парка составляет 3600 метров?

Ответ: 1200.

Вариант 7.4.3. Братья Лёша и Саша решили добраться из дома до скейт-парка. Они вышли одновременно, но Лёша пошёл пешком со скейтом в руках, а Саша поехал на скейте. Известно, что Саша едет на скейте в 3 раза быстрее, чем Лёша идёт пешком со скейтом. Через некоторое время они одновременно поменяли способ передвижения: Лёша поехал на скейте, а Саша пошёл пешком. При этом скорость движения каждого из них изменилась в 2 раза: у Лёши увеличилась, а у Саши уменьшилась. Оказалось, что до скейт-парка они добрались одновременно. Сколько метров проехал на скейте Саша, если расстояние от дома до скейт-парка составляет 2700 метров?

Ответ: 900.

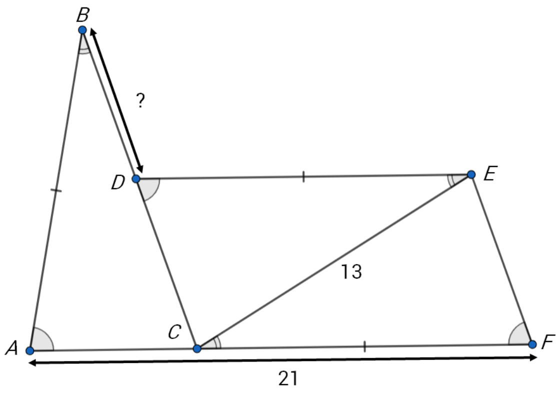
Вариант 7.4.4. Братья Лёша и Саша решили добраться из дома до скейт-парка. Они вышли одновременно, но Лёша пошёл пешком со скейтом в руках, а Саша поехал на скейте. Известно, что Саша едет на скейте в 3 раза быстрее, чем Лёша идёт пешком со скейтом. Через некоторое время они одновременно поменяли способ передвижения: Лёша поехал на скейте, а Саша пошёл пешком. При этом скорость движения каждого из них изменилась в 2 раза: у Лёши увеличилась, а у Саши уменьшилась. Оказалось, что до скейт-парка они добрались одновременно. Сколько метров проехал на скейте Саша, если расстояние от дома до скейт-парка составляет 2400 метров?

Ответ: 800.

Задача 7.5.1. Точки A, B, C, D, E, F на рисунке удовлетворяют следующим условиям:

- точки A, C, F лежат на одной прямой;
- $AB = DE = FC$;
- $\angle ABC = \angle DEC = \angle FCE$;
- $\angle BAC = \angle EDC = \angle CFE$;
- $AF = 21$, $CE = 13$.

Найдите длину отрезка BD.



Ответ: 5.

Решение. Заметим, что треугольники ABC, DEC и FCE равны по второму признаку равенства треугольников.

Поскольку $\angle DEC = \angle FCE$, прямые DE и AF параллельны. Значит, $\angle ACB = \angle CDE = \angle CAB$, поэтому все три треугольника — равнобедренные, и их боковые стороны равны 13.

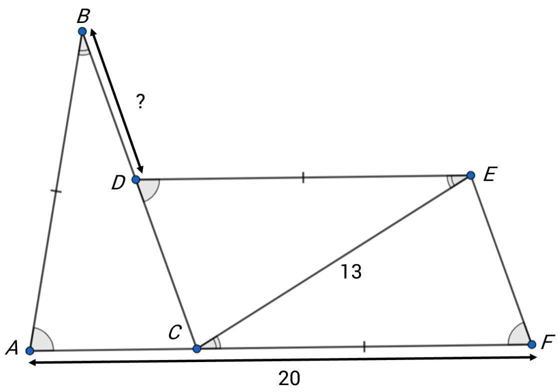
Осталось вычислить ответ:

$$BD = BC - CD = 13 - AC = 13 - (AF - CF) = 13 - (21 - 13) = 5. \qquad \square$$

Вариант 7.5.2. Точки A, B, C, D, E, F на рисунке удовлетворяют следующим условиям:

- точки A, C, F лежат на одной прямой;
- $AB = DE = FC$;
- $\angle ABC = \angle DEC = \angle FCE$;
- $\angle BAC = \angle EDC = \angle CFE$;
- $AF = 20$, $CE = 13$.

Найдите длину отрезка BD.

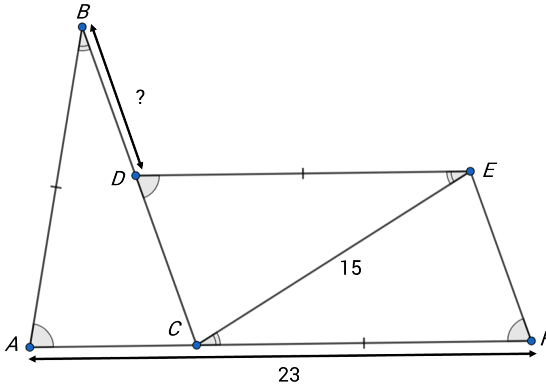


Ответ: 6.

Вариант 7.5.3. Точки A, B, C, D, E, F на рисунке удовлетворяют следующим условиям:

- точки A, C, F лежат на одной прямой;
- $AB = DE = FC$;
- $\angle ABC = \angle DEC = \angle FCE$;
- $\angle BAC = \angle EDC = \angle CFE$;
- $AF = 23$, $CE = 15$.

Найдите длину отрезка BD.

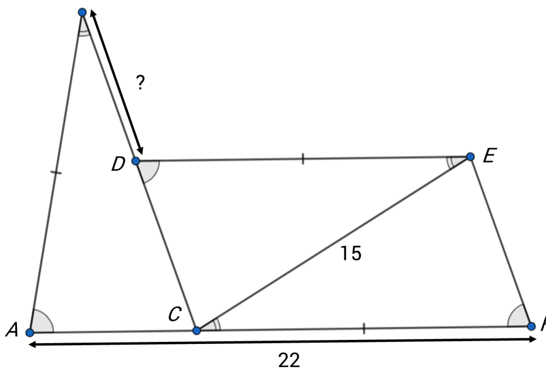


Ответ: 7.

Вариант 7.5.4. Точки A, B, C, D, E, F на рисунке удовлетворяют следующим условиям:

- точки A, C, F лежат на одной прямой;
- $AB = DE = FC$;
- $\angle ABC = \angle DEC = \angle FCE$;
- $\angle BAC = \angle EDC = \angle CFE$;
- $AF = 22$, $CE = 15$.

Найдите длину отрезка BD.



Ответ: 8.

Задача 7.6.1. В ряд стоит 10 коробок. В этих коробках лежат шарики двух цветов: красного и синего. В некоторых коробках все шарики могут быть одноцветными; пустых коробок нет. Известно, что в каждой следующей коробке (в порядке слева направо) шариков не меньше, чем в предыдущей. Также известно, что нет двух коробок с одинаковым набором красных и синих шариков. Сколько синих и сколько красных шариков лежит в самой правой коробке, если суммарно во всех коробках 11 красных и 13 синих шариков?

Ответ: 1 красный шарик, 3 синих шарика.

Решение. Среди всех коробок может быть:

- максимум 2 коробки с одним шариком (в одной — красный шарик, в другой — синий),
- максимум 3 коробки с двумя шариками (в одной — два красных шарика, в другой — красный и синий, в третьей — два синих),
- максимум 4 коробки с тремя шариками (в одной — три красных шарика, в другой — два красных и синий, в третьей — красный и два синих, в четвёртой — три синих).

Таким образом, в левых девяти коробках будет хотя бы $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20$ шариков. Тогда в самой правой коробке шариков не более $11 + 13 - 20 = 4$. Но из рассуждений выше следует, что если в какой-то коробке 1, 2 или 3 шарика, то это одна из левых девяти коробок. Значит, в самой правой коробке должно быть в точности 4 шарика, а в левых девяти коробках — в точности 20 шариков.

Нетрудно понять, что в левых девяти коробках лежат 10 красных и 10 синих шариков. Тогда в самой правой коробке будет $11 - 10 = 1$ красный и $13 - 10 = 3$ синих шарика. □

Вариант 7.6.2. В ряд стоит 10 коробок. В этих коробках лежат шарики двух цветов: красного и синего. В некоторых коробках все шарики могут быть одноцветными; пустых коробок нет. Известно, что в каждой следующей коробке (в порядке слева направо) шариков не меньше, чем в предыдущей. Также известно, что нет двух коробок с одинаковым набором красных и синих шариков. Сколько синих и сколько красных шариков лежит в самой правой коробке, если суммарно во всех коробках 10 красных и 14 синих шариков?

Ответ: 0 красных шариков, 4 синих шарика.

Вариант 7.6.3. В ряд стоит 10 коробок. В этих коробках лежат шарики двух цветов: красного и синего. В некоторых коробках все шарики могут быть одноцветными; пустых коробок нет. Известно, что в каждой следующей коробке (в порядке слева направо) шариков не меньше, чем в предыдущей. Также известно, что нет двух коробок с одинаковым набором красных и синих шариков. Сколько синих и сколько красных шариков лежит в самой правой коробке, если суммарно во всех коробках 13 красных и 11 синих шариков?

Ответ: 3 красных шарика, 1 синий шарик.

Вариант 7.6.4. В ряд стоит 10 коробок. В этих коробках лежат шарики двух цветов: красного и синего. В некоторых коробках все шарики могут быть одноцветными; пустых коробок нет. Известно, что в каждой следующей коробке (в порядке слева направо) шариков не меньше, чем в предыдущей. Также известно, что нет двух коробок с одинаковым набором красных и синих шариков. Сколько синих и сколько красных шариков лежит в самой правой коробке, если суммарно во всех коробках 14 красных и 10 синих шариков?

Ответ: 4 красных шарика, 0 синих шариков.

Задача 7.7.1. Семизначное натуральное число N назовём *интересным*, если:

- оно состоит из ненулевых цифр;
- оно делится на 4;
- любое число, получаемое из числа N с помощью перестановки цифр, делится на 4.

Сколько существует интересных чисел?

Ответ: 128.

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 4: число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4.

В интересном числе можно переставлять цифры как угодно, и от этого делимость на 4 должна сохраняться. Отсюда следует, что в его записи нет нечётных цифр (иначе любую из них можно было бы поставить в конец, и полученное число не разделилось бы на 4).

Переберём, на какие две ненулевые чётные цифры может заканчиваться интересное число. Как мы помним, двузначное число, образованное этими цифрами, делится на 4.

- 24 — этот вариант не подходит, так как при перестановке двух последних цифр число будет заканчиваться на 42, а 42 не делится на 4;
- 28 — этот вариант не подходит, так как при перестановке двух последних цифр число будет заканчиваться на 82, а 82 не делится на 4;
- 44 — этот вариант подходит;
- 48 — этот вариант подходит;
- 64 — этот вариант не подходит, так как при перестановке двух последних цифр число будет заканчиваться на 46, а 46 не делится на 4;
- 68 — этот вариант не подходит, так как при перестановке двух последних цифр число будет заканчиваться на 86, а 86 не делится на 4;
- 84 — этот вариант подходит;
- 88 — этот вариант подходит.

Отсюда следует, что интересное число может состоять только из цифр 4 и 8. Также очевидно, что любое число, каждая цифра которого равна 4 или 8, является интересным. Таким образом, каждая цифра семизначного интересного числа может принимать ровно 2 значения, и таких чисел ровно $2^7 = 128$. $\square$

Вариант 7.7.2. Восьмизначное натуральное число N назовём *интересным*, если:

- оно состоит из ненулевых цифр;
- оно делится на 4;
- любое число, получаемое из числа N с помощью перестановки цифр, делится на 4.

Сколько существует интересных чисел?

Ответ: 256.

Вариант 7.7.3. Девятизначное натуральное число N назовём *интересным*, если:

- оно состоит из ненулевых цифр;
- оно делится на 4;
- любое число, получаемое из числа N с помощью перестановки цифр, делится на 4.

Сколько существует интересных чисел?

Ответ: 512.

Задача 7.8.1. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = 2, \\ \dfrac{bc}{b+c} = 5, \\ \dfrac{ca}{c+a} = 9. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$.

Ответ: $\frac{180}{73}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}, \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{c+a}{ca}$$
$$\text{и} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}.$$

Значит, если мы заменим данные равенства на равенства обратных величин, получится

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

А величина, которую нам нужно найти, обратна к

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9}\right) = \frac{45 + 18 + 10}{2 \cdot 90} = \frac{73}{180}. \qquad \square$$

Вариант 7.8.2. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = 3, \\ \dfrac{bc}{b+c} = 5, \\ \dfrac{ca}{c+a} = 8. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{abc}{ab + bc + ca}$.

Ответ: $\frac{240}{79}$.

Вариант 7.8.3. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = 2, \\ \dfrac{bc}{b+c} = 5, \\ \dfrac{ca}{c+a} = 7. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{abc}{ab + bc + ca}$.

Ответ: $\frac{140}{59}$.

Вариант 7.8.4. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = 4, \\ \dfrac{bc}{b+c} = 5, \\ \dfrac{ca}{c+a} = 7. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$.

Ответ: $\frac{280}{83}$.