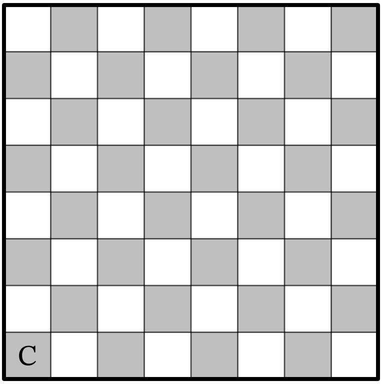
10 класс (ответы)

Задача 10.1. Новая шахматная фигура *слонопотам* за один ход может перемещаться либо на любое число клеток по диагонали, либо на одну клетку по горизонтали или по вертикали.

Слонопотам стоит в левой нижней клетке доски 8×8. Назовём клетку доски *достижимой,* если слонопотам может в неё попасть ровно за 2 хода. Сколько существует достижимых клеток?



Ответ: 46.

Задача 10.2. Действительные ненулевые числа a и b таковы, что квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 - 20ax + b$ имеет два действительных корня, отличающихся на 2.

(а) *(2 балла)* Найдите меньший из этих корней.

(б) *(2 балла)* Найдите $\frac{b}{a}$.

Ответ: а) 9. б) 99.

Задача 10.3. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ADB = 40°$ и $\angle CDB = 52°$. Точка M внутри четырёхугольника такова, что $\angle BAM = 26°$ и $\angle BCM = 20°$. Сколько градусов составляет угол CBM?

Ответ: 44.

Задача 10.4. Натуральное число назовём *счастливым,* если в его десятичной записи каждая цифра — либо ноль, либо семёрка. Число 20232023 представили в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является счастливым числом. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 9.

Задача 10.5. Различные натуральные числа n и k таковы, что

$$k < n < 2k < 3n < 4k < 5n < \ldots < 48k < 49n < 50k.$$

Какое наименьшее значение может принимать n?

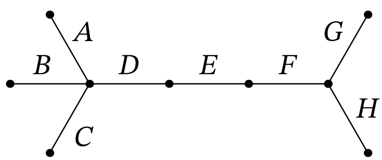
Ответ: 51.

Задача 10.6. **(а)** *(2 балла)* Рассмотрим все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы произведение никаких двух различных выбранных чисел не делилось на 12?

(б) *(2 балла)* Рассмотрим все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы произведение любых двух различных выбранных чисел делилось на 12?

Ответ: а) 67. б) 17.

Задача 10.7. Девять посёлков соединены восемью дорогами A, B, C, D, E, F, G, H, как показано на рисунке. Длины дорог равны 1, 2, 3, …, 8 км в некотором порядке. Для каждого посёлка нашли длину кратчайшего пути до каждого другого по дорогам, и все такие длины сложили.



(а) *(2 балла)* Известно, что полученная сумма — наибольшая из возможных. Какая из дорог может иметь длину 8 км? Укажите все возможные варианты.

(б) *(2 балла)* Сколько существует способов присвоить дорогам их длины от 1 до 8 км так, чтобы полученная сумма оказалась наибольшей из возможных?

Ответ: а) D, E. б) 240.

Задача 10.8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На продолжении отрезка HA за точку A нашлась точка D такая, что $\angle DBA = \angle CBA$. Найдите длину отрезка BD, если известно, что $BC = 7$ и $AD = 12$.

Ответ: 16.