XLVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс
Первый день

10.1. Как-то после уроков Миша выписал на листке десять натуральных чисел. Все десять чисел попарно различны. Известно, что из десяти написанных чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

10.2. Задан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что верны равенства

$$P(b+c)=P(a), \quad P(c+a)=P(b), \quad P(a+b)=P(c).$$

10.3. У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geq 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n.

10.4. Пусть $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$, где n – натуральное число. Известно, что числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k}=a_k$ при всех $k=0,1,\ldots,n$, и $a_n + a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

10.5. В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности.