Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

Москва, декабрь 2021

В 7 и 8 классах участникам отводилось 90 минут на решение олимпиады, а в 9, 10 и 11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

10 класс

Задача 10.1. Найдите любое натуральное x такое, что значение выражения $2^x + 2^8 + 2^{11}$ является квадратом натурального числа.

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что $x = 12$ подходит: $2^{12} + 2^8 + 2^{11} = (2^6)^2 + (2^4)^2 + 2 \cdot 2^6 \cdot 2^4 = (2^6 + 2^4)^2$.

Замечание. Число $x = 12$ — единственное, подходящее под условие задачи. □

Задача 10.2. По кругу лежат 36 шариков, каждый из которых либо красный, либо синий (шарики каждого из этих цветов присутствуют). Известно, что:

- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежит ровно один шарик;
- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежат ровно три шарика.

(а) *(2 балла)* Пусть нет двух рядом лежащих красных шариков. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

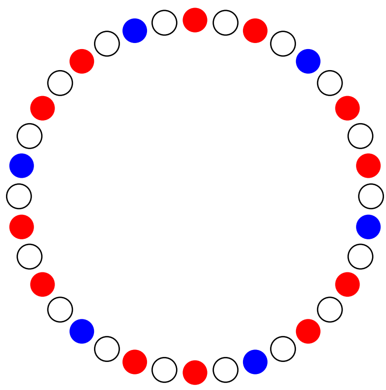
(б) *(2 балла)* Пусть есть два рядом лежащих красных шарика. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

Ответ:

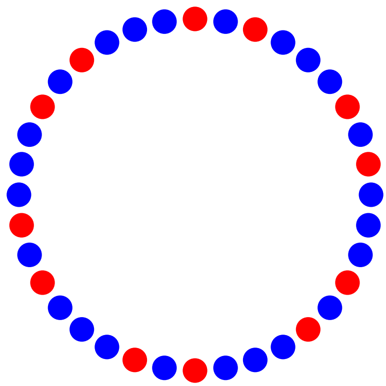
(а) *(2 балла)* 12.

(б) *(2 балла)* 24.

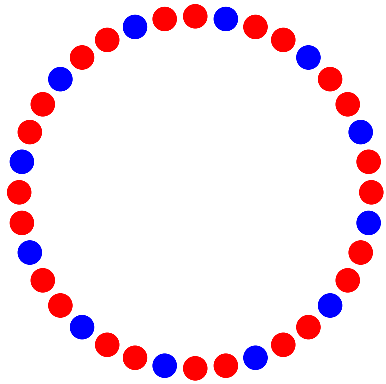
Решение. По условию найдутся два красных шарика, между которыми лежит ровно один шарик. Пронумеруем шарики по часовой стрелке числами $1, 2, \ldots, 36$ так, чтобы 1-й и 3-й шарики были красными. Из условия следует, что 35-й шарик синий (иначе первое условие неверно для 1-го шарика), 5-й шарик синий (иначе первое условие неверно для 3-го шарика), 7-й шарик красный (иначе второе условие неверно для 3-го шарика), 9-й шарик красный (иначе первое условие неверно для 7-го шарика). Значит, предположив, что 1-й и 3-й шарики — красные, мы получили, что шарик 5-й — синий, а 7-й и 9-й шарики — красные. Аналогично рассуждая дальше, получаем, что 11-й — синий, 13-й и 15-й — красные, ..., 31-й и 33-й — красные. Значит, среди шариков с нечётными номерами две трети составляют красные, а треть — синие.



(а) Пусть нет двух рядом красных шариков. Несложно понять, что тогда среди шариков с чётными номерами красных вообще нет. Значит, всего красных шариков $\frac{36}{2} \cdot \frac{2}{3} = 12$. Пример на 12 красных шариков изображён ниже.

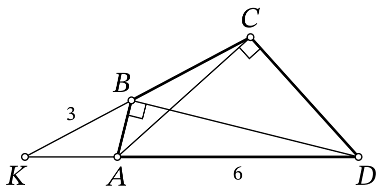


(б) Пусть есть два рядом красных шарика. Несложно понять, что тогда среди шариков с чётными номерами красные тоже составляют две трети. Значит, всего красных шариков $36 \cdot \frac{2}{3} = 24$. Пример на 24 красных шарика изображён ниже.



□

Задача 10.3. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, $\angle CAD = 42°$. Лучи CB и DA пересекаются в точке K. Известно, что $BK = 3$, $AD = 6$.



(а) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол BKA?

(б) *(2 балла)* Сколько градусов составляет угол BAC?

Ответ:

(а) *(2 балла)* $28°$.

(б) *(2 балла)* $34°$.

Решение. Из условия следует, что точки A, B, C, D лежат на окружности с диаметром AD. Соединим отрезком точку B и середину O отрезка AD, которая является центром этой окружности (рис. 6). Ясно, что $AO = OD = OB = BK = 3$.

Треугольники KBO и BOD являются равнобедренными. Пусть $\alpha = \angle BKA = \angle BOK$. Угол BOK, равный α, является внешним для треугольника BOD и равен сумме двух внутренних равных углов при вершинах B и D, поэтому $\angle OBD = \angle ODB = \frac{\alpha}{2}$.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ является вписанным, $\angle CBD = \angle CAD = 42°$. Угол CBD, равный $42°$, является внешним для треугольника KBD и равен сумме двух внутренних углов при вершинах K и D, поэтому $42° = \alpha + \frac{\alpha}{2}$, откуда находим $\angle BKA = \alpha = \frac{2}{3} \cdot 42° = 28°$.

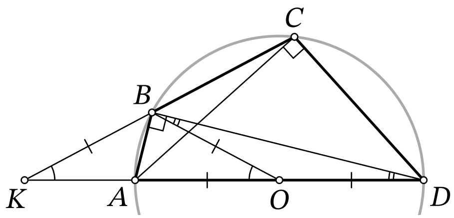


Рис. 6: к решению задачи 10.3

В прямоугольном треугольнике ABD сумма углов при вершинах A и D равна 90°, поэтому $90^\circ = \angle BAC + \angle CAD + \angle ADB = \angle BAC + 42^\circ + \frac{1}{2} \cdot 28^\circ$, откуда находим $\angle BAC = 34^\circ$. □

Задача 10.4. Дана клетчатая прямоугольная таблица. Известно, что существует:

- ровно 940 способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×2;
- ровно 894 способа вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×3.

Сколько существует способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×5?

При подсчёте количества способов вырезания прямоугольника учитываются и вертикальные, и горизонтальные расположения.

Ответ: 802.

Решение. Пусть в таблице a строк и b столбцов. Не нарушая общности, $a \leqslant b$. Ясно, что хотя бы одно из чисел a и b не меньше 2.

- Предположим, $a = 1$. Тогда из таблицы $1 \times b$ вырезать прямоугольник 1×2 можно $b-1 = 940$ способами, а вырезать прямоугольник 1×3 можно $b-2 = 894$ способами. Ясно, что таких значений b не существует.
- Предположим, $b \geqslant a \geqslant 2$. Тогда из таблицы $a \times b$ вырезать прямоугольник 1×2 можно $a(b-1)+b(a-1)$ способами, а прямоугольник 1×3 можно вырезать $a(b-2)+b(a-2)$ способами. Следовательно, $a(b-1)+b(a-1) = 940$ и $a(b-2)+b(a-2) = 894$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $a + b = 46$. Из этого следует, что $ab = 493$. По обратной теореме Виета числа a и b являются корнями трёхчлена $x^2 - 46x + 493 = (x-17)(x-29)$, поэтому $a = 17$ и $b = 29$. Вырезать прямоугольник 1×5 из таблицы 17×29 можно ровно $17 \cdot 25 + 13 \cdot 29 = 802$ способами. □

Задача 10.5. Несколько сладкоежек приняли участие в состязании по поеданию конфет. Каждый участник съел целое количество конфет, причём любые два участника съели разное количество конфет. Подводя итоги состязания, жюри упорядочило всех людей по убыванию количества съеденных конфет (например, победитель съел больше всего конфет, а человек, занявший последнее место, съел меньше всего конфет).

Известно, что:

- победитель съел в 14 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший третье место, съел в 20 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший последнее место, съел в 21 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые.

Сколько сладкоежек участвовало в состязании?

Ответ: 21.

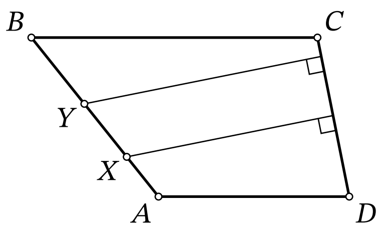
Решение. Пусть всего было n сладкоежек, и суммарно они съели S конфет. Из условия следует, что победитель съел $\frac{S}{15}$ конфет, человек на третьем месте — $\frac{S}{21}$ конфет, человек на последнем месте — $\frac{S}{22}$ конфет.

Все участники, кроме последнего, съели больше $\frac{S}{22}$ конфет. Значит, $S > n \cdot \frac{S}{22}$, откуда получаем $n < 22$, то есть $n \leqslant 21$.

Человек на втором месте съел менее $\frac{S}{15}$ конфет, а все участники на местах с третьего по n-е съели не более $\frac{S}{21}$ конфет. Значит, $S < 2 \cdot \frac{S}{15} + (n-2) \cdot \frac{S}{21}$, откуда получаем $1 < \frac{2}{15} + \frac{n-2}{21}$. Поэтому $n - 2 > 21 \cdot \frac{13}{15} > 18$, то есть $n \geqslant 21$. Значит, $n = 21$.

Также для $n = 21$ можно привести пример. Пусть 1-й сладкоежка съел 924 конфеты, 2-й — 783 конфеты, 3-й — 660 конфет, с 4-го по 21-го — с 647 по 630 конфет соответственно (суммарно съедено 13860 конфет). Несложно проверить, что все условия задачи выполняются. $\square$

Задача 10.6. Дана трапеция $ABCD$. Отрезки AB и CD — её боковые стороны — равны 24 и 10 соответственно. На стороне AB отмечены точки X и Y так, что $AX = 6, XY = 8, YB = 10$. Известно, что расстояния от точек X и Y до прямой CD равны 23 и 27 соответственно.



(а) *(1 балл)* Найдите площадь треугольника ACD.

(б) *(3 балла)* Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ:

(а) *(1 балл)* 100.

(б) *(3 балла)* 260.

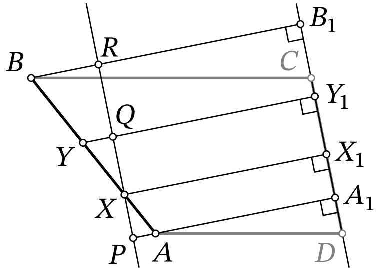


Рис. 7: к решению задачи 10.6

Решение. Докажем, что расстояния от точек A и B до прямой CD равны 20 и 32 соответственно. Пусть A_1, X_1, Y_1, B_1 — проекции точек A, X, Y, B на прямую CD соответственно (рис. 7). Проведём через X прямую, параллельную CD, пусть она пересекает прямые AA_1, YY_1, BB_1 в точках P, Q, R соответственно. У подобных прямоугольных треугольников APX, YQX, BRX гипотенузы относятся как $AX : XY : YB = 6 : 8 : 18 = 3 : 4 : 9$, поэтому $AP : YQ : BR = 3 : 4 : 9$. Учитывая, что $YQ = YY_1 - QY_1 = YY_1 - XX_1 = 27 - 23 = 4$, получаем, что $AP = 3$ и $BR = 9$. Тогда $AA_1 = XX_1 - AP = 23 - 3 = 20$ и $BB_1 = XX_1 + BR = 23 + 9 = 32$.

Тогда $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 = 100$ и $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BB_1 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 10 = 160$.

У трапеции $ABCD$ площади треугольников ABC и BCD равны, поскольку сторона BC у них общая, а также равны высоты, опущенные на неё из точек A и D. Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = 100 + 160 = 260. \qquad \square$$

Задача 10.7. На острове живёт 23 рыцаря и 200 лжецов; имена всех жителей различны. Знающий об этом приехавший турист попросил каждого из 223 жителей написать на листке 200 имён лжецов. Каждый рыцарь написал верно 200 имён лжецов, а каждый лжец написал произвольный список из 200 имён, в котором точно нет его собственного имени. Какое наибольшее количество лжецов турист сможет гарантированно определить по этим данным?

Ответ: 16.

Решение. Для начала приведём стратегию для лжецов, позволяющую гарантированно вычислить не больше 16 из них. Назовём рыцарей $R_1, R_2, \ldots, R_{23}$, а лжецов — $L_1, L_2, \ldots, L_{200}$. Все рыцари укажут в своих списках $L_1, L_2, \ldots, L_{200}$. Пусть для каждого целого $0 \leqslant i \leqslant 7$ группа лжецов $L_{23i+1}, L_{23i+2}, \ldots, L_{23i+23}$ укажет в своих списках $R_1, R_2, \ldots, R_{23}$, а также всех лжецов, кроме самих $L_{23i+1}, L_{23i+2}, \ldots, L_{23i+23}$. А 16 лжецов $L_{185}, L_{186}, \ldots, L_{200}$ укажут в своём списке $R_1, R_2, \ldots, R_{23}, L_1, L_2, \ldots, L_{177}$. Турист, увидев полученные списки, не сможет гарантированно вычислить ни одного лжеца среди $L_1, L_2, \ldots, L_{184}$ (это и означает, что он вычислит не более 16 лжецов). Действительно, если бы вдруг турист заявил, что L_k — лжец, то он мог бы ошибиться: группа из 23 человек, в которую входил L_k, вполне могла полностью состоять только из рыцарей, которые в своих списках одинаково указали на всех остальных людей, которые вполне могли оказаться лжецами.

Теперь поймём, почему турист всегда сможет вычислить хотя бы 16 лжецов. Факт того, что человек указывает в списке 200 имён предполагаемых лжецов равносилен тому, что он называет рыцарями оставшихся 23 человек (включая себя). Все 23 рыцаря заведомо называют рыцарями друг друга. Заметим, что если некоторый человек A назовёт рыцарями группу из 23 человек, не все из которых называют рыцарями эту же группу людей, то A — точно лжец (если бы он был рыцарем, то все названные им люди тоже были бы рыцарями, а тогда бы они назвали рыцарями эту же группу). Групп из 23 человек, называющих рыцарями друг друга, не больше 9 (ведь $10 \cdot 23 > 223$), и они не пересекаются. Следовательно, турист точно может гарантировать, что оставшиеся люди, не входящие в такие группы, являются лжецами. И таких людей хотя бы $223 - 9 \cdot 23 = 16$. □

Задача 10.8. Неотрицательные числа a, b, c в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$(a + 3b + 5c) \cdot \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right).$$

Ответ: $\frac{9}{5}$.

Решение. Несложно проверить, что при $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$ получается значение $\frac{9}{5}$. Докажем, что оно не больше $\frac{9}{5}$ для любых неотрицательных a, b, c с суммой 1.

Заметим, что

$$(a + 3b + 5c) \cdot \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) - \frac{9}{5}(a + b + c)^2 = -\frac{4}{15}(3(a - c)^2 + ab + 3b^2 + 5bc) \leqslant 0,$$

поэтому

$$(a + 3b + 5c) \cdot \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) \leqslant \frac{9}{5}(a + b + c)^2 = \frac{9}{5}.$$ □