Условия и решения задач

9 класс

9.5. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, $\ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{i+m-1} этой последовательности назовём *монотонным отрезком длины m*, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность a_N, a_{N+1}, $\ldots$ монотонна, т. е. $a_N < a_{N+1} < \ldots$ или $a_N > a_{N+1} > \ldots$. (*А.С. Голованов*)

Первое решение. Будем называть индекс $k \geqslant 2$ *плохим*, если $a_{k-1} < a_k > a_{k+1}$ или $a_{k-1} > a_k < a_{k+1}$. Заметим, что если среди индексов $N+1, N+2, \ldots$ нет плохих, то последовательность $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ монотонна.

Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда найдётся бесконечно много плохих индексов. Выберем некоторый плохой индекс k. Возьмём произвольное $n > k$ и рассмотрим монотонный отрезок I длины $n+1$, содержащий a_n. Он не может содержать членов a_{k-1}, a_k и a_{k+1} одновременно; следовательно, поскольку $k+1 \leqslant n$, отрезок I точно не содержит a_{k-1}, а следовательно, не содержит и a_1.

Итак, монотонный отрезок I длины $n+1$ содержит a_n, но не содержит a_1; тогда он обязан содержать a_n, a_{n+1} и a_{n+2}, так что индекс $n+1$ не является плохим. Итак, при любом $n > k$ индекс $n+1$ не плохой, поэтому плохих индексов конечное количество. Противоречие.

Второе решение. Предположим противное. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 < a_2$ (иначе можно умножить все члены последовательности на -1). Поскольку последовательность $a_2, a_3, \ldots$ не является возрастающей, существует такое $k \geqslant 2$, что $a_k > a_{k+1}$. Поскольку последовательность $a_{k+1}, a_{k+2} \ldots$ не является убывающей, существует такое $\ell > k$, что $a_\ell < a_{\ell+1}$. Выберем наименьшее ℓ, удовлетворяющее этим двум неравенствам. Тогда либо $\ell > k+1$, и тогда $a_{\ell-1} > a_\ell$ согласно выбору ℓ, либо $\ell = k+1$, и тогда $a_{\ell-1} = a_k > a_{k+1} = a_\ell$. Итак, в любом случае $a_{\ell-1} > a_\ell$.

Рассмотрим монотонный отрезок длины ℓ, содержащий $a_{\ell-1}$; он обязан содержать и a_ℓ. Поскольку $a_{\ell-1} > a_\ell$, числа этого отрезка монотонно убывают. Значит, он не может содержать числа a_1 (иначе бы он содержал и $a_2 > a_1$). Но тогда, раз длина отрезка равна ℓ, он обязан содержать и $a_{\ell+1} > a_\ell$, что невозможно.

9.6. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$? (*А. Храбров*)

Ответ. $a = 1\,001\,000$.

Первое решение. Докажем, что $a \geqslant 1\,001\,000$. Заметим, что если y — корень трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $1/y$ — корень трёхчлена $cx^2 + bx + a$. Поэтому в задаче нужно найти наименьшее натуральное a, для которого корни x_1 и x_2 некоторого трёхчлена $cx^2 + bx + a$ (с целыми b и c) больше 1000. Поскольку x_1 и x_2 положительны и $x_1x_2 = a/c$ (по теореме Виета), имеем $c > 0$.

Если $c = 1$, то $|x_1 - x_2| = \sqrt{b^2 - 4a} \geqslant 1$. Поскольку меньший корень не меньше 1000, больший корень не меньше 1001, а тогда $a = x_1x_2 \geqslant 1001 \cdot 1000$. Если же $c \geqslant 2$, то $a = cx_1x_2 \geqslant 2x_1x_2 > > 2\,000\,000$. В обоих случаях требуемая оценка доказана.

Осталось заметить, что трёхчлен $x^2 - (1000 + 1001)x + + 1001 \cdot 1000$ имеет корни 1000 и 1001, поэтому $a = 1\,001\,000$ подходит.

Второе решение. Положим для краткости $n = 1000$. Пусть x_1 и x_2 — два различных корня трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, причём $0 < x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда число $b = -a(x_1 + x_2)$ отрицательно, а число $c = ax_1x_2$ положительно. Более того, имеем $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 < \frac{2}{n}$, откуда $a > -\frac{nb}{2}$.

Поскольку корни различны, дискриминант $D = b^2 - 4ac$ положителен. Следовательно, $b^2 > 4ac > -2nbc$ и, значит, $-b >$

$> 2nc$. Поэтому $a > (-b) \cdot \frac{n}{2} > 2nc \cdot \frac{n}{2} = n^2c$. Пусть $a = n^2c + d$, где d — натуральное число.

Предположим, что $a < n^2 + n$. Тогда $c = 1$ и $d < n$. Стало быть, $0 \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + c = \frac{d}{n^2} + \frac{b}{n} + 2 < \frac{1}{n} + \frac{b}{n} + 2$ и, значит, $-b < 2n + 1$. Следовательно, $-b \leqslant 2n$ и $D = b^2 - 4ac \leqslant 4n^2 - 4(n^2 + d) = -4d < 0$. Это противоречие показывает, что $d \geqslant n$.

Если же $a = n^2 + n$, то при $b = -2n - 1$ и $c = 1$ трёхчлен имеет корни $x_1 = \frac{1}{n+1}$ и $x_2 = \frac{1}{n}$.

9.7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5 000.

(*И. Богданов*)

Решение. Назовём набор городов *критическим*, если есть ровно $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе (тогда $k > 11$, ибо иначе между городами группы есть не более $k(k-1)/2 \leqslant 5k < 5k+10$ рейсов). Если группа из всех 998 городов критическая, то в стране уже $5 \cdot 998 + 10 = 5\,000$ рейсов.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что законы в любой момент соблюдены. Обозначим через $f(X)$ количество рейсов, соединяющих два города группы X.

Докажем, что если группа из всех городов не критическая, то министерство может добавить один рейс с соблюдением законов. Повторяя такие операции, министерство добьётся требуемого. Заметим, что, если между городами x и y нет рейса, то добавить его министерство не может лишь в случае, когда оба города x и y входят в какую-то критическую группу.

Лемма. *Пусть A и B — критические группы. Тогда группа $A \cup B$ также критическая.*

Доказательство. Положим $C = A \cap B$, $D = A \cup B$. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$; тогда $|D| = a+b-c$. По условию, имеем $f(A) = 5a + 10$, $f(B) = 5b + 10$ и $f(C) \leqslant 5c + 10$. Заметим, что все рейсы, посчитанные в $f(A)$ и $f(B)$, учитываются также и в $f(D)$; более того, если какой-то рейс учтён и в $f(A)$, и в $f(B)$, то оба его конца лежат в C, то есть количество дважды учтённых рейсов равно $f(C)$. Поэтому

$$f(D) \geqslant f(A) + f(B) - f(C) \geqslant (5a + 10) + (5b + 10) - (5c + 10) = \\ = 5(a + b - c) + 10 = 5d + 10.$$

Учитывая, что законы соблюдены, получаем $f(D) = 5d+10$, что и требовалось. □

Вернёмся к решению. Если в настоящий момент нет ни одной критической группы, можно добавить рейс между любой парой городов, между которыми его ещё нет (такая пара найдётся!). Иначе, применяя лемму, получаем, что объединение всех критических групп — тоже критическая группа A; по предположению, в ней $a < 998$ городов. Пусть x — город вне A; тогда x не входит ни в какую критическую группу.

Пусть из x идёт k рейсов в города из A. Поскольку группа $A' = A \cup \{x\}$ не критическая, имеем

$$5(a + 1) + 10 > f(A') = f(A) + k = 5a + 10 + k,$$

откуда $k < 5$. С другой стороны, $a \geqslant 12$, поэтому в A есть город y, не соединённый рейсом с x, и города x и y не входят в одну критическую группу. Значит, министерство может ввести рейс между x и y.

9.8. В треугольник ABC вписана окружность ω, касающаяся стороны BC в точке K. Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A. Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω'. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам. (*А. Шевцов*)

Решение. Пусть точки B', C' и K' симметричны относительно A точкам B, C и K соответственно. Тогда окружность ω' вписана в треугольник $AB'C'$ и касается $B'C'$ в точке K'. Медиана AM является средней линией в треугольниках BCC' и $B'BC$, так что $AM \parallel BC' \parallel B'C$. Поскольку A — середина KK', утверждение задачи равносильно тому, что прямая AM содержит среднюю линию треугольника $KK'A_0$ (параллельную A_0K'), то есть утверждение равносильно параллельности $B'C \parallel A_0K'$.

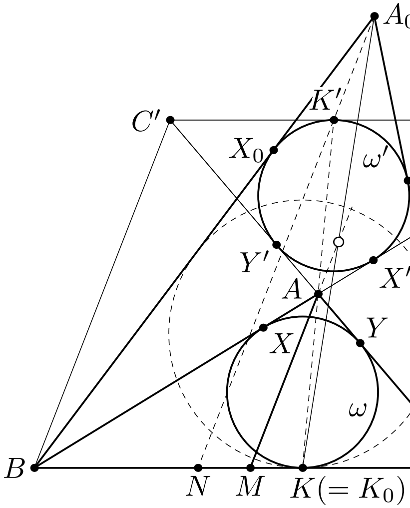

Рис. 1

Пусть ω касается AB и AC в точках X и Y соответственно, а ω' касается отрезков AB', AC', A_0B и A_0C в точках X', Y', X_0 и Y_0 соответственно. Заметим, что $AB - AC = (AX + XB) - (AY + YC) = XB - YC = KB - KC$. Аналогично, если вписанная окружность треугольника A_0BC касается BC в точке K_0, то $A_0B - A_0C = K_0B - K_0C$. Однако

$$A_0B - A_0C = (A_0X_0 + X_0B) - (A_0Y_0 + Y_0C) = X_0B - Y_0C = \\ = X'B - Y'C = (XA + AB) - (YA + AC) = AB - AC,$$

так что $KB - KC = K_0B - K_0C$, и потому $K = K_0$.

Из доказанного следует, что вневписанные окружности треугольников ABC и A_0BC также касаются отрезка BC в одной и той же точке N, симметричной K относительно M (поскольку $BN = CK$). Гомотетия с центром A_0, переводящая прямую BC в прямую $B'C'$, переводит вневписанную окружность треугольника A_0BC в окружность ω', то есть точку N — в K'. Значит, N лежит на прямой A_0K; но, поскольку $BN = CK = C'K'$, имеем $K'N \parallel B'C$, то есть $A_0K' \parallel B'C$, что и требовалось.

Замечание 1. После первого абзаца решение также можно завершить применением теоремы Брианшона к описанному (около ω') шестиугольнику $A_0BB'K'C'C$. Теорема утверждает, что три главных диагонали A_0K', BC', $B'C$ этого шестиугольника пересекаются в одной точке или попарно параллельны; в нашей задаче реализуется второй случай, то есть $A_0K' \parallel BC' \parallel B'C$.

Замечание 2. Из утверждения задачи следует, что центр I' вписанной окружности треугольника A_0BC лежит на AM. Существуют способы решить задачу, доказав этот факт.

Критерии оценивания работ 9 класса

1 задача

- Решение опирается на то, что главные делители числа n равны n/p_1 и n/p_2, где p_1 и p_2 — простые числа; в этом предположении задача решена верно: 1 *балл.*
- Решение состоит в разборе трёх или четырёх случаев (a/p, a/q и a/p, a/p^2 комбинируются с b/r, b/s и b/r, b/r^2), которые явно выделены в тексте; один случай рассмотрен неверно, а остальные верно: 4 *балла.*
- Решение состоит в разборе двух или трёх относительно равноценных по сложности случаев, которые явно выделены в тексте, и не подпадают под предыдущий критерий; один случай рассмотрен неверно, а остальные верно: *до* 3 *баллов.*

  Например: пусть минимальные простые множители входят в канонические разложения данных чисел в степенях x и y, и рассматриваются случаи; $x = 1$, $y = 1$; $x > 1$, $y > 1$; $x = 1$, $y > 1$; $x > 1$, $y = 1$.
- Ошибки или существенные пробелы в обосновании верных фактов о делимости: *снимается* 1 *балл.*

2 задача

- Переформулировки условия со ссылками на известные теоремы, но без содержательных продвижений — 0 *баллов.*
- Угадан верный ответ без его обоснования — 0 *баллов.*
- Найдены две пары параллельных прямых, образующих параллелограмм, без дальнейших продвижений — 0 *баллов.*
- Двоякое (или неясное) определение точки M (см. решение 1), без доказательства равносильности определений, при наличии всех верных этапов решения в остальном — 4 *балла.*
- Ошибка в окончательном подсчёте отношения при верной последовательности шагов решения — *снимается* 1 *балл.*
- Верное счётное решение, в котором пропущено обоснование корректности деления — *снимается* 1 *балл.*

3 задача

- Рассуждения, связанные с рассмотрением степеней вхождения 2 и 3 в числа последовательности — 0 *баллов.*
- Рассмотрены частные случаи (например, когда все числа в 2 раза меньше предыдущих) — 0 *баллов.*

4 задача

(×) Только ответ — 0 *баллов.*
Использование в примере кусков нулевой площади *не приводит к снятию баллов.*

Общие принципы. Решение состоит из двух частей: «Пример» (то есть доказательство того, что $k \leqslant 12$) и «Оценка» (доказательство того, что $k \geqslant 12$). Пример оценивается *из* 3 *баллов*, оценка — *из* 4 *баллов*; баллы за эти две части складываются.

Если в работе доказывается **неточное** неравенство — например, $k \leqslant 13$ в примере или $k \geqslant 11$ в оценке, за соответствующую часть ставится *не более* 1 *балла.*

Пример ($k \leqslant 12$, *из* 3 *баллов*).
(П1) Приведён пример, в котором нельзя выдать квадраты более, чем 12 детям (возможно, с указанием вида «из этих 15 квадратов не удастся вырезать более 9») — 1 *балл.*
(П2) Полное обоснование того, что пример работает — +2 *балла.*

(П3) Полное доказательство отсутствует, но чётко указана верная идея такого обоснования — $+1$ *балл вместо* $+2$. Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [П$*$].

(П0) Если приведённый пример доказывает **неточное** неравенство ($k \leqslant 13$ или хуже), 1 *балл* можно получить **только** в случае, если этот пример полностью обоснован, **и при этом** это обоснование содержит идеи, работающие в общем случае. Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [П$**$].

Оценка ($k \geqslant 12$, *из* 4 *баллов*). При доказательстве **неточной** оценки ($k \geqslant 11$ или хуже), или при доказательстве точной оценки, но с неверной конструкцией, за оценку ставится *не более* 1 *балла.*

(О1) Приведена верная конструкция без обоснования, что она работает (либо с неверным обоснованием) — 1 *балл.*

(О2) В верной оценке не доказываются несложные, но неочевидные неравенства — *снимается* 1 *балл.* Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [О$*$].

(О0) При отсутствии верной конструкции выписываются неравенства, полезные при доказательстве верной конструкции — 1 *балл.* Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [О$**$].

[П$*$]: примеры применения критерия (П3).

Балл *добавляется* за следующие продвижения:

• Высказано соображение, что каждая прямая, параллельная сторонам квадрата, пересекает не более трёх «больших» квадратов.

• Доказательство сведено к факту «Из 10 равных отрезков на прямой найдутся либо 4 попарно непересекающихся, либо 4 имеющих общую точку».

Если не сказано, как из этих соображений выводить доказательство, третьего балла за пример не добавляется.

Балл *не добавляется* за следующее продвижение:

• На сторону влезет не более трёх больших квадратов.

[П$**$]: примеры применения критерия (П0).

Балл *добавляется* в случае полного доказательства и использованием следующих аргументов (или их аналогов для большего числа квадратов).

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** они оба содержат внутри центр торта;

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** средняя линия торта пересекает оба, и эти пересечения перекроются.

Балл *не добавляется* в случае доказательства и с использованием следующих аргументов (или аналогичных им):

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** их проекции на каждую сторону пересекаются, и потому у квадратов есть общая внутренняя точка.

• Если все квадраты равны, то 17 таких квадратов не влезут, **так как** сумма длин их проекций на сторону больше 4, и потому какая-то вертикальная прямая пересечёт пять из них.

• Если все квадраты равны, то 17 таких квадратов не влезут, **так как** каждая горизонтальная прямая пересекает не более 4 из них, и потому суммарная занятая площадь не превосходит $\frac{4}{\sqrt{18}} < \frac{17}{18}$.

Естественно, приведённые выше факты, заявленные без доказательства, также оцениваются в 0 *баллов.*

В дальнейшем тексте через $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{18}$ обозначены стороны запрошенных кусков.

[О$*$]: примеры применения критерия (О2).

Балл *снимается* за отсутствие доказательства неравенства $4(a_7^2 + a_{10}^2 + a_{13}^2 + a_{16}^2) \leqslant a_1^2 + \cdots + a_{16}^2$.

Балл *не снимается* за отсутствие доказательства неравенства $3(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2) \leqslant a_1^2 + \cdots + a_9^2$.

[О$**$]: примеры применения критерия (О0).

Балл *добавляется* за доказательство одного (или нескольких) из следующих неравенств (или аналогичных им):

$$a_7 + a_8 + a_9 \leqslant 1; \quad a_8 + a_9 + a_{10} \leqslant 1; \quad a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} \leqslant 1.$$

Балл *не добавляется* за доказательство одного (или нескольких) из следующих неравенств (возможно, с последующим построением неточных примеров на основе этих неравенств):

$$a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} \leqslant 1; \quad a_9 + a_{10} + a_{11} \leqslant 1; \quad a_3 + a_4 \leqslant 1; \quad a_9 \leqslant 1/3; \quad a_k \leqslant 1/\sqrt{k}.$$

5 задача

Критериев нет.

6 задача

- В правильном решении забыт или неверно рассмотрен случай $c \geqslant 2$ — *снимался* 1 *балл.*
- За пример для $a = 1000 \cdot 1001$ — *ставилось* 2 *балла.*
- За верное доказательство неравенства $-b \geqslant 2001$ (неравенство должно явно присутствовать в тексте работы) — *ставилось* 2 *балла.*
- Неравенства $-b > 2000$, $b^2 \geqslant 4\,000\,004$ и т. п. не оценивались.
- Если в решении был и пример и доказанное неравенство $-b \geqslant 2001$, то вместе за это продвижение *ставилось* 3 *балла.*
- Любые рассмотрения рациональных корней трехчлена, основанные на соображениях, связанных с делимостью, оценивались в 0 *баллов.*

7 задача

Критическим множеством вершин здесь называется множество из k вершин с $5k + 10$ ребрами между ними.

- Доказано, в форме леммы или иным способом, что пересечение **или** объединение двух критических множеств тоже является критическим: 2 *балла.*
- Во в целом верном решении не доказано, что существует требуемая пара вершин, ещё не соединённая ребром (но существование такой пары легко доказывается): *снимается* 1 *балл.*

  Этот балл также снимается, если в этом доказательстве присутствует грубая ошибка, например, при подсчёте числа уже проведённых рёбер неверно (дважды) учитываются рёбра между вершинами вне максимального критического множества.
- В решении выбирается пара не соединённых вершин, которой на самом деле **может** не существовать: *не более* 4 *баллов.*
- Если в работе доказана лемма о пересечении и объединении двух критических множеств и на её основе установлено существование критического множества, содержащего **все** критические множества: 3 *балла.*
- В работе лемма об объединении доказана неверно, но из неё выводится полное решение: 3 *балла.*
- Делается шаг индукции в предположении существования вершины степени не выше 5, или решение опирается на утверждение о существование вершины степени не выше 5: 0 *баллов.*
- Определение понятия критического множества, база индукции, утверждения о том, что в критическом графе не меньше 13 рёбер и подобные технические действия сами по себе: 0 *баллов.*
- Начата работа с пересечением и объединением критических множеств без доказательства леммы и дальнейших продвижений: 0 *баллов.*

8 задача

В тексте использованы обозначения авторского решения.

- Не доведённый до конца координатный (векторный, тригонометрический, комплексный) счёт — 0 *баллов.*
- Построен вспомогательный параллелограмм $BC'B'C$ и задаче сведена к доказательству параллельности $B'C$ и A_0K' — 1 *балл.*
- Задача сведена к доказательству того, что точки A_0, K', N лежат на одной прямой — 1 *балл.*
- Доказана лемма о том, что вписанные (или вневписанные) окружности треугольников ABC и A_0BC касаются BC в одной и той же точке — 2 *балла.*
- Упомянутые выше баллы могут суммироваться.