10 класс

10.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бо́льших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

10.2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE и $AD \leqslant AE$. Пусть O — центр окружности (ADE). Пусть точка A' симметрична A относительно серединного перпендикуляра к отрезку DE (см. рис. 5). Из симметрии $A'B = AC = BQ$. Окружность с центром B и радиусом BA' пересекает окружность (ADE) в точках, симметричных относительно прямой BO, то есть точки A' и Q симметричны относительно BO. Аналогично, точки A' и P симметричны относительно прямой CO.

Прямые OB и OC симметричны относительно серединного

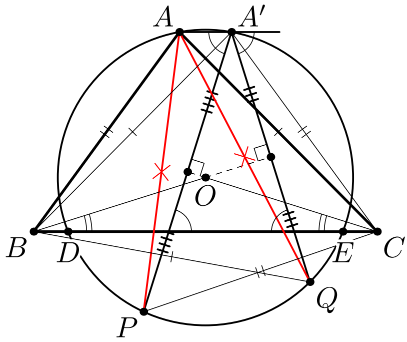

Рис. 5

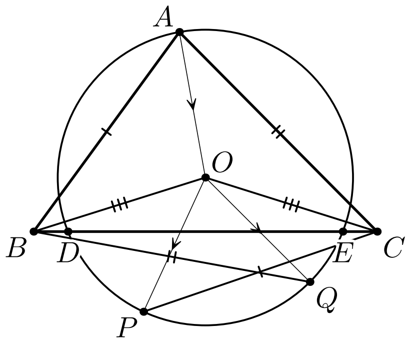

Рис. 6

перпендикуляра к отрезку DE, поэтому они образуют равные углы с прямой DE. Поскольку $A'P \perp CO$, $A'Q \perp BO$ и $AA' \parallel$ $\parallel DE$, то прямые $A'Q$ и $A'P$ образуют равные углы с прямой AA'. Значит, меньшие дуги окружности (ADE), стягиваемые хордами AP и AQ равны, а тогда $AP = AQ$, что и требовалось.

Второе решение. Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE. Пусть O — центр окружности (ADE). Заметим, что $OB = OC$. Поскольку $\angle DAE < \angle BAC < 90^\circ$, то точки A и O лежат по одну сторону от прямой BC (см. рис. 6). Треугольники OAB и OPC равны по трем сторонам, треугольники OAC и OQB — тоже.

Тогда $\angle ABQ = \angle ABO + \angle OBQ = \angle PCO + \angle OCA = \angle PCA$. (Если луч BO не лежит внутри угла ABQ, то луч BA лежит внутри угла QBO, а значит и внутри угла OBC. В этом случае либо $\angle BOA > \angle BOE = \angle COD > \angle COP$, либо $\angle BOA <$ $< \angle BOD = \angle COE < \angle COP$; в обоих случаях получаем противоречие с равенством треугольников OAB и OPC. Аналогично, луч CO лежит внутри угла PCA.)

Поэтому треугольники ABQ и PCA равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $AP = AQ$.

10.3. Изначально на доске написана пара чисел $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y-1)$ и $(x+y, y+1)$, то можно дописать другую. Аналогично, если на доске написана одна из пар (x, xy) и $\left(\frac{1}{x}, y\right)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным. (*М. Антипов*)

Первое решение. Назовём *дискриминантом* пары чисел (a, b) величину $D(a, b) = b^2 - 4a$. Докажем, что дискриминант всех пар чисел, записанных на доске, всегда отрицателен. Действительно, дискриминант пары чисел, записанной изначально, равен $D(1, 1) = -3 < 0$. Далее, верны следующие соотношения:

$$\frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{y^2 - 4x - 2y + 1}{y^2 - 4x - 2y + 1} = 1$$

и

$$\frac{D(x, xy)}{D(1/x, y)} = \frac{x^2y^2 - 4x}{y^2 - 4/x} = x^2,$$

поэтому на доске ни в какой момент не может появиться число с положительным дискриминантом. Теперь рассмотрим любую выписанную на доску пару (a, b). В ней первое число a равно $\frac{b^2 - D}{4}$ и, следовательно, больше 0, что и требовалось доказать.

Второе решение. Если на доске написана пара (x, y), то с помощью первой операции можно добавить или пару $(x + y + 1, y + 2)$, или пару $(x - y + 1, y - 2)$. Обе этим пары можно записать как $(x + ky + k^2, y + 2k)$, где в первом случае $k = 1$, а во втором — $k = -1$. С помощью второй операции можно добавить только пару $\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$.

Докажем более общий факт: на каждом шаге для любых целых s, t, таких, что $s^2 + t^2 > 0$, для любой пары чисел (x, y), написанной на доске, выполняется неравенство

$$s^2x + sty + t^2 > 0.$$

В частности, при $s = 1, t = 0$ получается в точности утверждение исходной задачи.

Для пары $(1, 1)$ утверждение задачи верно. Далее, рассмотрим два типа операций:

• $(x, y) \to (x + ky + k^2, y + 2k)$. Тогда для новой пары верно $s^2(x + ky + k^2) + st(y + 2k) + t^2 = s^2x + s(sk + t)y + (sk + t)^2 > 0$.

• $(x, y) \to (1/x, y/x)$. Здесь также получаем нужное неравенство:

$$s^2\,\frac{1}{x} + st\,\frac{y}{x} + t^2 = \frac{t^2x + tsy + s^2}{x} = \frac{t^2x + tsy + s^2}{1^2 \cdot x + 1 \cdot 0 \cdot y + 0^2} > 0.$$

10.4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k? (*А. Глебов, Д. Храмцов*)

Ответ. $k = 2n - 3$ при нечётном n, и $k = 2n - 4$ при чётном $n > 4$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим шаг, на котором Василий помечает некоторый отрезок AB. Перед этим шагом из каждой из точек A и B выходит максимум по $n - 2$ отрезка, и они содержат максимум $2n - 4$ различных пометки. Значит, Василий точно сможет пометить этот отрезок числом, не превосходящим $2n - 3$. Итак, $k \leqslant 2n - 3$.

Если n чётно, эту оценку можно уточнить следующим образом. Назовём *маленьким* отрезок, помеченный единицей. Докажем, что в конце процесса из каждой точки будет выходить маленький отрезок; предположим противное. Точки, из которых выходят маленькие отрезки, разбиваются на пары точек, соединённых таким отрезком. Значит, есть хотя бы две точки X и Y, из которых не выходит маленьктх отрезков. Выходит, что когда Василий проводил отрезок XY, он должен был пометить его единицей — противоречие.

Значит, если отрезок AB не будет маленьким. то в конце процесса среди отрезков, выходящих из A и B, кроме AB, будут два маленьких отрезка. Значит, на этих отрезках будет максимум $2(n-2) - 1 = 2n - 5$ различных пометок. Следовательно, когдв Василий будет проводить отрезок AB, он сможет пометить его числом, не превосходящим $2n - 4$, и $k \leqslant 2n - 4$.

Пример. Осталось доказать, что Василий может достичь указанных значений k.

Лемма. *Если количество точек чётно и равно m, то Василий может пометить все отрезки между этими точками, использовав лишь числа от 1 до $m - 1$. При этом из каждой* *точки будут выходить отрезки, помеченные всеми этими числами.*

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от конкретного расположения точек, так что можно считать, что $m-1$ точек $A_1, \ldots, A_{m-1}$ расположены в вершинах правильного $(m-1)$-угольника, а оставшаяся точка — в его центре O.

Тогда все отрезки между этими точками можно разбить на $m-1$ множеств S_1, S_2, $\ldots$, S_{m-1} так, чтобы отрезки одного множества не имели общих концов. Например, в множество S_i можно включить отрезок OA_i и все отрезки, соединяющие пары вершин $(m-1)$-угольника и перпендикулярные OA_i. Из каждой точки выходит по отрезку каждого из множеств.

Теперь Василий может сначала пометить все отрезки множества S_1 числом 1, затем все отрезки второго множества числом 2, и т. д. $\square$

Вернёмся к решению. Пусть n нечётно, и пусть A — отмеченная точка. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками, отличными от A, числами от 1 до $n-2$ согласно лемме. Затем он проведёт все $n-1$ отрезок из A; каждый отрезок AB ему придётся помечать числом, бо́льшим $n-2$, ибо из B уже выходят отрезки, помеченные всеми меньшими числами. Кроме того, все эти $n-1$ отрезок будут помечены разными числами, ибо у них есть общий конец. Следовательно, они будут помечены числами $n-1$, n, $\ldots$, $2n-3$, то есть Василий получит пометку $k=2n-3$.

Пусть теперь n чётно. Выберем две отмеченных точки A и B; пусть C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-2} — остальные отмеченные точки. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками C_i числами от 1 до $n-3$ согласно лемме, а также пометит отрезок AB числом 1. Затем он последовательно проводит отрезки AC_1, AC_2, $\ldots$, AC_{n-3}; поскольку в вершины C_i уже входят отрезки с пометками от 1 до $n-3$, новые отрезки будут помечены числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно. Далее Василий проводит отрезки BC_{n-3}, BC_2, BC_3, $\ldots$, BC_{n-4}; аналогично, он пометит их числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно.

Теперь в вершины A и B уже входят отрезки со всеми пометками от $n-2$ до $2n-6$, а в вершину C_{n-2} — со всеми пометками от 1 до $n-3$. Значит, когда Василий проводит отрезки AC_{n-2} и BC_{n-2}, первый будет помечен числом $2n-5$, а второй — числом $2n-4$ (ибо имеет общий конец с предыдущим). Значит, Василий добился появления числа $k = 2n-4$.

Задача 10.1

$\leqslant 3$ б. При разборе случаев, каким может быть второй по величине главный делитель, хотя бы один из случаев рассмотрен неверно.

$\leqslant 1$ б. В работе считается, что оба главных делителя — это исходное число, поделенное на какие-то из своих простых делителей.

$\leqslant 2$ б. В работе считается, что либо главные делители — это исходное число, поделенное на какие-то из своих простых делителей, либо само исходное число — степень простого числа.

Задача 10.2

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Задача сведена к равенству треугольников ABQ и ACP или углов ABQ и ACP.

Баллы за частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Построена точка A' — симметрия точки A относительно серединного перпендикуляра к BC (DE).

1 б. Для точек K и L пересечения окружности (ADE) с отрезками BQ и AC соответсвенно доказано, что $BK = CL$.

За ошибки в решениях снижаются баллы по *одному* из следующих критериев:

−2 б. Решение использует точку O — центр окружности (ADE), и ведется подсчет углов, корректность которого зависит от расположения точки O. Не разобран или разобран неверно случай, когда O лежит внутри одного из углов ABC или ACB, но вне треугольника ABC.

−2 б. Решение использует точку O — центр окружности (ADE), и рассматривается поворот с центром в точке O. Не доказано или доказано неверно расположение образов части точек конструкции.

За отсутствие рассмотрения случаев расположения точки O вне области, образованной объединением углов ABC и ACB, баллы не снижаются.

−2 б. Решение использует утверждение: если во вписанном четырехугольнике диагонали равны, то он равнобокая трапеция. При этом не рассмотрен один из возможных случаев параллельности противоположных сторон.

Следующие рассуждения оцениваются частичными баллами:

$\leqslant 3$ б. В работе рассматривается расположение точек P и Q вне меньшей дуги DE, и рассуждение ведется для такого случая, а не для описанного в задаче.

Задача 10.3

Следующие три продвижения не оцениваются:

0 б. Выражение операций из условия в других переменных.

0 б. Вычисление композиции пар основных операций, устранение сокращающихся пар из последовательности операций.

0 б. Доказательство того, что вместе с парой (a, b) можно получить пару $(a, -b)$.

Частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Вычисление k-й степени первой операции.

3 б. Введение в рассмотрение выражения $b^2 - 4a$.

3 б. Рассмотрение трёхчленов $t^2 + bt + a$ для написанных на доске пар (a, b) и доказательство их положительности только при целых t, в котором условие целочисленности легко устранить.

Технические ошибки, за которые снимаются баллы:

−1 б. Деление на выражение, которое может быть 0, без разбора случая, когда оно равно 0, в ситуации, когда этот случай легко поддаётся разбору.

−1 б. Некорректное извлечение квадратного корня из неравенства в ситуации, когда достаточно исходного неравенства.

Задача 10.4

Баллы за оценку суммируются с баллами за пример.

[3 б.] Оценка, баллы суммируются:

+1 б. (U1) Оценка $\leqslant 2n - 3$.

+2 б. (U2) Оценка $\leqslant 2n - 4$ для чётных n.

Из этих 2 баллов ставится 1 в следующем случае:

+1 б. (U2a) Доказательство того, что при чётном n из каждой вершины выходит ребро с числом 1.

[4 б.] Пример, баллы суммируются:

+1 б. (L0) Формулировка и доказательство леммы о том, что в подграфе на $2m$ вершинах можно добиться, чтобы из каждой вершины выходили ребра с числами 1, 2, …, $2m - 1$.
Либо формулировка и доказательство леммы о разбиении полного графа на $2m$ вершинах на $2m - 1$ паросочетание.
(Лемма может использоваться при построении примера; так что если пример для всех чётных или для всех нечётных n построен без использования леммы или аналогичного утверждения, этот балл тоже засчитывается.)

+1 б. (L1) Пример на $2n - 3$, работающий для всех нечётных n, построенный на основе верной формулировки леммы (возможно, недоказанной).

+2 б. (L2) Пример на $2n - 4$, работающий для всех чётных n, построенный на основе верной формулировки леммы (возможно, недоказанной).

Частичные примеры, не суммируются с др. баллами за пример:

1 б. (L1a) Пример для беск. мн-ва нечётных n (например, $n = 2$^$k + 1$).

2 б. (L2a) Пример для беск. мн-ва чётных и для беск. мн-ва нечётных n (например, $n = 2$^$k + 1$, $n = 2$^$k + 2$).

Задача 10.5

0 б. В работе отсутствует верный пример.

Задача 10.6

Обозначим #(0…011), т. е. количество фрагментов, на которых написана n-символьная последовательность 0…011, за m.

Частичные продвижения, не суммируются:

2 б. Задача решена в предположении $m = 0$.

2 б. Доказано неравенство $\#(0\ldots010) \geqslant M - m$.

Задача 10.7

Ошибки в верном в целом решении, за которые снимаются баллы:

−1 б. Используется, что прямые AE и CF пересекаются, но это не обосновано, т. е. случай параллельности не рассмотрен.

Задача 10.8

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Удаление нулей на конце числа.

Частичные продвижения, не суммируются:

1 б. Доказательство того, что из правой половины числа можно вычеркнуть не более одной цифры.

2 б. Разбор случая N, взаимно простого с 10.

3 б. Разбор случая N, не кратного 5.