

Задача 5. Один магазин на две деревни (12 баллов)

Население деревни Вилларибо проживает равномерно¹ на отрезке $[0; 1]$, а деревни Виллабаджо — равномерно на отрезке $[2; 3]$. В Вилларибо и Виллабаджо приехал владелец сети магазинов «Кукумбрикс», который объявил, что сеть построит первый и единственный магазин в окрестности, а в какой точке прямой $(-\infty; +\infty)$ он будет построен — решать жителям деревень. Конечно, каждый житель хочет, чтобы магазин был построен как можно ближе к его дому.

Обычно все общие географические вопросы жители Вилларибо и Виллабаджо решают, используя механизм «Посередине между делегатами». А именно, сначала каждая деревня выбирает по одному делегату. Затем, если дом делегата Вилларибо находится в точке с координатой a , а дом делегата Виллабаджо имеет координату b , то решением вопроса является точка с координатами $\frac{a+b}{2}$. Делегатом a будем называть того, который живет в точке с координатой a .

а) (2 балла) Изобразите на прямой $(-\infty; +\infty)$ множество всех точек, в которых хотя бы при какой-нибудь паре делегатов может быть построен магазин.

б) (2 балла) Докажите, что жителям Вилларибо для выбора делегата не нужна информация о делегате от Виллабаджо: если житель Вилларибо x предпочитает делегата от Вилларибо a_1 делегату a_2 при делегате от Виллабаджо b_1 , то житель Вилларибо x предпочтет делегата от Вилларибо a_1 делегату a_2 при любом другом делегате от Виллабаджо b_2 .

в) (3 балла) В этом и только в этом пункте считаем, что жители деревень выбирают в качестве делегата *победителя по Кондорсе* — такого жителя деревни, что его предпочтет не менее половины жителей этой деревни при голосовании против любого другого жителя деревни (корректность определения следует из предыдущего пункта). Где будет построен магазин?

г) (3 балла) Говорят, что механизм принятия решений является манипулируемым, если существует такая пара делегатов от деревень, что хотя бы одному из делегатов выгодно скрыть настоящее место расположения своего дома и использовать для принятия решения какую-то другую координату. Докажите, что описанный механизм принятия решений является манипулируемым.

д) (2 балла) Предложите какой-нибудь механизм принятия решений, выдающий по паре делегатов a и b место для магазина и не являющийся манипулируемым.

Решение

а) По условию задачи $0 \leq a \leq 1$ и $2 \leq b \leq 3$. Следовательно,

$$1 \leq \frac{a+b}{2} \leq 2$$

Любая точка x из интервала $[1; 2]$ в действительности может быть получена в качестве места строительства магазина при паре делегатов $a = x - 1$ и $b = x + 1$. Таким образом, ответ в пункте а) — интервал $[1; 2]$.

¹Это значит, что на любом отрезке длиной $\alpha \leq 1$ внутри отрезка $[0; 1]$ проживает доля α населения деревни.

б) Из пункта а) и условия задачи следует, что магазин всегда будет располагаться не левее любого из жителей Вилларибо. Следовательно, произвольный житель Вилларибо x , сравнивая двух кандидатов в делегаты от Вилларибо a_1 и a_2 , предпочтет того из них, кто находится левее, чтобы разместить магазин как можно левее. Это верно при любом кандидате из Виллабаджо. Таким образом, предпочтения жителей Вилларибо на множестве возможных делегатов от Вилларибо не зависят от делегата от Виллабаджо.

в) В пункте б) мы доказали, что каждый житель Вилларибо из двух кандидатов в делегаты будет предпочитать того, кто живет левее. Следовательно, кандидат, живущий в точке 0, будет победителем по Кондорсе: за него проголосуют все жители против любого другого кандидата a . Аналогично, победителем по Кондорсе от Виллабаджо является кандидат, живущий в точке 3. Значит, магазин будет построен в точке 1,5.

г) Рассмотрим, например, пару делегатов $a = 1$, $b = 2$. Тогда магазин будет построен в точке 1,5. Однако делегату a выгодно соврать и назвать $a_1 = 0$: в этом случае при том же самом b магазин будет построен в точке 1. Следовательно, описанный механизм принятия решений является манипулируемым.

д) Например, рассмотрим функцию $f(a, b) = 0$. Она задает константный механизм принятия решений, при котором независимо от делегатов магазин строится в точке 0. Этот механизм неманипулируем: скрывать свое место проживания делегату не имеет смысла, ведь магазин все равно будет построен в точке 0.

Схема проверки

а) За правильный ответ ставится 1 балл. Корректное доказательство приносит еще 1 балл.

б) За неполный перебор всех возможных пар a_1 и a_2 снимается 1 балл (например, часто правильно сравнивали 0 и $a_2 > 0$, но при этом забывали сравнить $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$).

в) За доказательство того, что все жители Вилларибо предпочитают 0 любой другой альтернативе, ставится +1 балл.

За доказательство того, что все жители Виллабаджо предпочитают 3 любой другой альтернативе, ставится +1 балл.

За правильный ответ при наличии найденных точек 0 и 3 ставится +1 балл. Правильный ответ при неправильном решении не оценивался.

г) Оценка в этом пункте бинарна: за наличие примера с манипулированием и доказательство того, что он подходит, ставится 3 балла. В остальных случаях ставится 0.

д) Оценка в этом пункте бинарна: за приведенный пример функции $f(a, b)$ и доказательство того, что механизм неманипулируемый, ставится 2 балла.

Если участник олимпиады привел несколько примеров, среди которых есть некорректный, то ставится 0 баллов.

Задача 6. Продажа валютной выручки (12 баллов)

В стране Альфа национальной валютой является тугрик, а рынок нефти совершенно конкурентный. На рынке присутствует 100 фирм, функция издержек каждой из которых имеет вид $TC = 200q^2$, где q — выпуск фирмы, TC — общие издержки (в тугриках). Внутренний спрос на нефть описывается уравнением $Q = 100 - P/4$, где P — внутренняя цена (в тугриках). Фирмы могут также экспортировать нефть по мировой цене 8 долларов за единицу. Каждая фирма должна оплачивать свои издержки тугриками, а прибыль держит в долларах (при необходимости докупая их). Внутренний спрос делится поровну между фирмами. Импорт нефти в страну запрещен. Изначально на счетах фирм нет долларов и тугриков.

Спрос других экономических агентов на доллары описывается уравнением $D = 480 - 8e$, где e — обратный валютный курс тугрика (цена доллара в тугриках). Спрос может быть отрицательным, если агенты при данном курсе предпочитают продавать доллары, а не покупать. Например, при курсе $e = 100$ будет иметь место предложение долларов в размере $|480 - 8 \cdot 100| = 320$. Нефтяные компании воспринимают валютный курс и все цены как заданные.

а) (3 балла) При каких значениях e фирмы будут продавать нефть как на внутреннем, так и на внешнем рынке?

б) (2 балла) Найдите функцию предложения долларов нефтяными компаниями (как функцию от e) для значений e , найденных вами в пункте а). Предложение отрицательно, если фирмы предъявляют спрос на доллары.

в) (3 балла) Найдите функцию предложения долларов нефтяными компаниями для всех $e \geq 0$ и равновесный курс e .

г) (3 балла) Государство обязало каждую нефтяную компанию обменивать на тугрики как минимум долю $\alpha \in [0; 1]$ долларовой выручки, а покупать доллары им запретило. Считайте, что каждая фирма стремится сохранить на счету максимальное возможное количество долларов. Найдите равновесный курс e как функцию от α .

д) (1 балл) Допустим, вместо того, чтобы обязывать отечественные фирмы продавать долю валютной выручки, государство обязывает иностранцев покупать нефть страны Альфа только за тугрики. Основываясь на ваших результатах выше, определите, чему будет равен равновесный валютный курс в этом случае.

Решение

а) Найдём функцию предложения каждой фирмы. Используя $P = MC$ или максимизируя прибыль $Pq - 200q^2$, получаем, что $q_s = P/400$, а значит, рыночное предложение описывается уравнением $Q = P/4$.

Если фирма продает нефть на двух рынках, то цена в тугриках на внутреннем рынке должна быть равна цене на международном с учетом валютного курса, то есть $P = 8e$. Действительно, иначе она будет поставлять только на тот рынок, где цена больше.

Чтобы имел место внутренний спрос, P должно быть меньше 400. Чтобы фирмы могли экспортировать часть нефти, должен быть избыток товара на рынке, то есть $P/4 > 100 - P/4$, откуда $P > 200$. Поскольку $200 < P < 400$, $200 < 8e < 400$, откуда

$25 < e < 50$.

Ответ: $e \in (25; 50)$.

б) Пусть TR_{exp} — экспортная валютная выручка фирмы в долларах, TR_{vn} — ее внутренняя выручка в тугриках. Тогда прибыль фирмы в тугриках равна $eTR_{exp} + TR_{vn} - TC$, прибыль в тугриках равна $TR_{exp} + (TR_{vn} - TC)/e$.

Соответственно,

- Если $TR_{vn} - TC > 0$, фирма будет продавать тугрики в размере $TR_{vn} - TC$ и покупать доллары, ее спрос на доллары будет равен $(TR_{vn} - TC)/e$, а предложение равно $-(TR_{vn} - TC)/e = (TC - TR_{vn})/e$.

- $TR_{vn} - TC < 0$, фирма не будет хватать рублей, чтобы внутренней выручкой оплатить издержки, фирма будет продавать доллары, чтобы восполнить эту разницу. Предложение долларов составит $(TC - TR_{vn})/e$.

Значит, так или иначе, предложение фирмой долларов будет равно $(TC - TR_{vn})/e$.

Предложение всеми фирмами долларов будет равно $100(TC - TR_{vn})/e$.

Выразим эту величину только через e .

$$TC = 200q^2 = 200(P/400)^2 = P^2/800 = (8e)^2/800 = 8e^2/100,$$

$$100TC = 8e^2,$$

$$100TR_{vn} = 100Pq_{vn} = P(100 - P/4) = 8e(100 - 2e).$$

Значит,

$$S(e) = 100(TC - TR_{vn})/e = \frac{8e^2 - 800e + 16e^2}{e} = 24e - 800.$$

Ответ: $S(e) = 24e - 800$.

в) Поймем, что происходит при $e \geq 50$ и $e \leq 25$.

- При $e \geq 50$, фирмы продают нефть только на внешний рынок, а значит, им надо будет продавать доллары в размере TC/e , чтобы оплатить издержки. Значит $S(e) = 100TC/e = 8e^2/e = 8e$.

- При $e \leq 25$, фирмы не будут продавать за рубеж. Поскольку импорт запрещен, страна не будет участвовать в международной торговле. Всю тугриковую прибыль фирмы будут менять на доллары. Цена будет равна 200, количество 50, индивидуальное количество равно 0,5, поэтому издержки фирм будут $100TC = 100 \cdot 200 \cdot 0,5^2 = 100 \cdot 200/4 = 5000$. Прибыль фирм равна $50 \cdot 200 - 5000 = 5000$ тугриков. Значит, их спрос на доллары составит $5000/e$, а предложение долларов $S(e) = -5000/e$.

В обобщенном виде:

$$S(e) = \begin{cases} -5000/e, & e \leq 25; \\ 24e - 800, & e \in (25; 50); \\ 8e, & e \geq 50. \end{cases}$$

Пересечение предложения со спросом $D(e) = 480 - 8e$ будет на среднем участке, $e^* = 40$.

Ответ: предложение дано выше, равновесный курс равен 40.

г) Валютная выручка равна $8Q_{exp} = 8(P/4 - (100 - P/4)) = 4P - 800 = 32e - 800$.

Поэтому новое предложение долларов при $e < 50$ будет описываться уравнением

$$S(e) = \max\{0; 24e - 800; \alpha(32e - 800)\}.$$

Поскольку предложение точно не снизится, курс не повысится по сравнению с 40, а значит случай $e > 50$ рассматривать не нужно.

В изначальном равновесии фирмы продают долю валютной выручки в размере

$$\frac{24e - 800}{32e - 800} = \frac{24 \cdot 40 - 800}{32 \cdot 40 - 800} = \frac{1}{3}.$$

Получаем, что при $\alpha \leq 1/3$ вмешательство государства не повлияет на равновесие, а при $\alpha \in (1/3; 1]$ равновесный курс будет $(60 + 100\alpha)/(1 + 4\alpha)$. В итоге

$$e(\alpha) = \begin{cases} 40, & \alpha \leq 1/3; \\ \frac{60+100\alpha}{1+4\alpha}, & \alpha \in (1/3; 1]. \end{cases}$$

д) Продажа за тугрики означает, что иностранцам придется покупать на рынке тугрики и продавать доллары в размере всей валютной выручки фирмы, то есть это эквивалентно случаю $\alpha = 1$.

Значит, ответом будет $e(1) = 32$.

Ответ: 32 тугрика за доллар.

Схема проверки

а) Всего за пункт — 3 балла.

- Получение функции предложения (индивидуальной или общей) — 1 балл.
- Получение границы $e > 25$ — 1 балл.
- Получение границы $e < 50$ — 1 балл.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт 1 балл. (за границу $e < 50$).

б) Всего за пункт — 2 балла.

- Идея о том, что предложение валюты равно $(TC - TR_{vn})/e$ — 1 балл.
- Расчет этой величины — 1 балл.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт 1 балл. (за идею).

в) Всего за пункт — 3 балла.

- Предложение при $e > 50$ — 1 балл.
- Предложение при $e < 25$ — 1 балл.
- Нахождение равновесного курса — 1 балл.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт все три балла (не штрафовался).

г) Всего за пункт — 3 балла.

- Расчет величины валютной выручки — 1 балл.
- Нахождение порога $\alpha = 1/3$ — 1 балл.
- Расчет $e(\alpha)$ при $\alpha > 1/3$ — 1 балл.

Если участник верно решал задачу для монополии, он получал за пункт все три балла (не штрафовался).

д) Идея о том, что нужно взять $e(1)$ — 1 балл. Если участник верно решал задачу для монополии, он не штрафовался за этот пункт.

Таким образом, верное решение для монополии могло принести 9 баллов из 12.

Задача 7. Размер семьи и предложение труда (12 баллов)

Как вы знаете из одного из заданий регионального этапа, экономисты исследуют поведение людей в практически любом контексте. Так, важным разделом экономической науки является экономика семьи. Одним из центральных вопросов в этой области является следующий:

Верно ли, что увеличение количества детей в семье приводит (в смысле причинно-следственной связи) к снижению предложения труда их матери?

Обсуждению исследований этого вопроса и посвящена данная задача.

а) (2 балла) Объясните, почему ответ на данный вопрос не очевиден, то есть почему увеличение количества детей может теоретически (1) не влиять на предложение труда их матери; (2) привести к увеличению предложения труда их матери.

б) (4 балла) Допустим, в статистических данных вы видите отрицательную корреляцию между количеством детей у женщины и величиной ее предложения труда. Например, в семьях с 0 детей женщина работает в среднем 40 часов в неделю, в семьях с 1 ребенком — 30 часов, с 2 — 25, с 3 и более — 20 часов в неделю. Объясните, почему из этого *не* следует, что рост количества детей является причиной снижения предложения труда женщин. Приведите *два* разных объяснения.

в) (5 баллов) В 2021 г. Премия Банка Швеции по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля была присуждена за развитие метода *естественных экспериментов*, который позволяет получить ответы на многие исследовательские вопросы в условиях, когда провести «обычный» эксперимент не представляется возможным. Этот метод основан на том, что часть людей может подвергаться случайному воздействию в ходе самой жизни, естественным образом. Это случайное воздействие может быть не связано с разнообразными характеристиками людей. Поэтому сравнивая тех, кто подвергся воздействию, с теми кто не подвергся, можно сделать вывод о том, является ли воздействие причиной изменения других переменных — как если бы мы сами оказывали воздействие на людей в ходе эксперимента.

Какой естественный эксперимент позволяет ответить на вопрос, который мы обсуждаем в этой задаче? (Подсказка: сама природа все время проводит такой эксперимент.) Объясните, как работает этот эксперимент.

г) (1 балл) Вооружившись данными эксперимента, приведенного вами в предыдущем пункте, можно ответить и на другие важные исследовательские вопросы. Приведите пример такого вопроса и объясните, почему важно знать ответ на него.

Решение

а) Условия, при которых увеличение количества детей не влияет на предложение труда их матери: высокий достаток семьи (мужа или родителей), при котором у матери не возникает необходимости работать; наличие няни или бабушки/дедушки, готовых сидеть с ребёнком; культурные установки, согласно которым женщина не должна работать (в обществе в целом или в конкретной семье); особенности работы матери, из-за которых невозможно регулирование продолжительности рабочего дня.

Основное условие, при котором увеличение количества детей повышает предложение труда их матери, — это необходимость зарабатывать больше денег для того, чтобы обеспечивать увеличившуюся семью.

б) В этом пункте необходимо привести два разных объяснения, каждое оценивается в 2 балла. Примеры хороших объяснений:

- Благополучие семьи: более обеспеченные семьи могут позволить себе большее число детей, при этом в более обеспеченных семьях у женщин меньше стимулов работать.
- Карьерные предпочтения женщины: женщина одновременно определяет своё предложение труда и желаемое количество детей на основе собственных предпочтений.
- Не рост количества детей является причиной снижения предложения труда, а наоборот: при снижении предложения труда у женщины появляется больше времени, которое можно посвятить воспитанию детей, и в семье принимается решение завести ещё одного ребёнка.

Как правило, основные способы объяснения относятся либо к наличию пропущенных переменных (первые два пункта в списке выше), которые влияют и на количество детей, и на предложение труда, либо к обратной причинности (третий пункт в списке выше). Формальное указание этих механизмов (пропущенных переменных или обратной причинности) без привязки непосредственно к задаче оценивалось в 1 балл.

в) Ключевым моментом естественного эксперимента — это то, что он представляет собой случайное воздействие, которое при этом влияет на количество детей. Важно, что при естественном эксперименте число детей не является сознательным решением родителей, и именно поэтому мы можем считать, что нет никаких пропущенных переменных, влияющих на количество детей (оно случайно) и нет влияния предложения труда на количество детей (опять же, потому что оно случайно). Примеры такого воздействия (правильный пример воздействия с механизмом) оценивается в 3 балла. Они могут быть, например, такими:

- Рождение двойни (или большего числа детей одновременно). Если сравнивать женщин с одним ребёнком и женщин, родивших двойню, то вся разница в числе детей (один или два) объясняется исключительно случайным фактором и не является их сознательным решением.
- Количество детей, родившихся в результате процедуры ЭКО.
- Внезапная смерть ребёнка (не обусловленная характеристиками родителей).

При этом важно контролировать, чтобы по всем прочим параметрам участвующие в исследовании женщины были сопоставимы.

С дополнительными пояснениями может быть принято сравнение предложения труда бесплодных женщин и женщин с детьми, при условии, что и те, и другие изначально хотели завести детей, а бесплодные не знали о своём бесплодии. Важно, что нельзя сравнивать просто бесплодных женщин и женщин с детьми, потому что наличие/отсутствие ребёнка может быть объяснено не только случайным фактором (бесплодие), но и сознательным выбором женщин (бесплодные могли изначально и не собираться заводить детей или знать о своём бесплодии) и не являться естествен-

ным экспериментом.

Неверным является исследование, основанное просто на оценке предложения труда женщин с разным числом детей, в том числе и сравнение женщин с детьми и без. Неверным же является изучение женщин с незапланированными детьми, потому что этот фактор нельзя считать чисто случайным в нормальных условиях (к примеру, потому, что не каждая беременность приводит к рождению ребёнка). Приёмные дети тоже не являются случайным воздействием, поэтому не могут служить естественным экспериментом.

Непосредственно оценка влияния числа детей на предложение труда может быть основана на сравнении предложения труда женщин с одинаковыми характеристиками (возраст, уровень образования, доход и так далее), но разным числом детей, которое обусловлено случайным воздействием. К примеру, можно сравнить похожих по характеристикам женщин, у одной из которых один ребёнок, а у другой — двойня. Описание процедуры оценивается в 2 балла.

г) Большое число исследований, изучающих влияние числа детей на какие-то характеристики их матери или их самих, может быть проведено на основе таких данных. К примеру, влияние числа детей на расходы семьи на одного ребёнка может быть корректно оценено на данных такого эксперимента. Ответ на этот вопрос важно знать, к примеру, для планирования государственной политики в области поддержки рождаемости.

Схема проверки

а) По одному баллу за каждый из подвопросов пункта. Один и тот же аргумент, приведённый дважды, оценивается один раз (одним баллом).

б) По два балла за каждое объяснение.

Одно и то же объяснение, приведённое дважды, оценивается один раз (двумя баллами).

Ответ без механизма не засчитывается (к примеру, просто указание на то, что благосостояние семьи влияет на оба показателя без объяснения почему и каким образом).

Формальное описание механизма без привязки к задаче оценивается в 1 балл (просто указание на наличие пропущенных переменных, просто указание на возможную обратную причинность).

в) 3 балла даётся за случайное воздействие, лежащее в основе исследования, при обязательном упоминании о необходимости контролировать, чтобы женщины были сопоставимы по всем прочим параметрам; 2 балла даётся за описание процедуры оценки влияния числа детей на предложение труда. В случае, если в работе приведено два примера естественного эксперимента (чего не требовалось в задаче), из них один верный и один неверный, штраф в 3 балла.

г) 1 балл ставился за любое подходящее исследование. Важно, что предлагаемое исследование должно быть основано на проведённом эксперименте, количестве детей, и в работе должно быть объяснено, почему знать ответ на этот вопрос важно.

Задача 8. У самого синего моря**(12 баллов)**

Старуха посылает Старика к синему морю, чтобы он поймал ей золотую рыбку, которую она ценит в 12 монет. Рыбка нужна только Старухе, больше никому. Старуха обещает дать Старика зарплату в w монет за поход к морю и ещё дополнительный бонус в b монет, если он принесёт ей рыбку. Узнав эти условия (которые Старуха обязана исполнить!), Старик может выбрать одно из двух действий:

- пойти к морю, взять у лодочника в аренду лодку и попытаться поймать рыбку — шансы на успех и неудачу при этом равны;
- пойти к морю, посидеть на берегу и вернуться, сказав, что рыбку поймать не удалось.

Арендная плата за лодку составляет 5 монет и платится после получения всех выплат от Старухи. Но может получиться так, что этих выплат не хватит, — тогда Старик впоследствии, когда у него появятся монеты (предположим, что когда-нибудь это произойдёт), будет вынужден выплатить лодочнику сумму долга в двойном размере.

Старуха не может наблюдать, что делает Старик у моря. Она выбирает неотрицательные величины зарплаты w и бонуса b так, чтобы максимизировать свой усреднённый выигрыш Π , состоящий из ценности рыбки (в случае, если Старик её поймает) за вычетом всех выплат Старика. Например, если старуха рассчитывает, что Старик попробует поймать рыбку, то ее усреднённый выигрыш равен

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (12 - w - b) + \frac{1}{2} \cdot (-w).$$

Старик, наблюдая w и b , выбирает одно из своих двух действий так, чтобы максимизировать свои усреднённые выплаты за вычетом того, что он должен отдать лодочнику. Усреднение производится по тому же принципу, что и для Старухи. Предполагаем, что, если Старика безразлично, ловить рыбку или нет, то он ловит.

- а) (3 балла)** Найдите оптимальное действие Старика при заданных $w, b \geq 0$;
- б) (3 балла)** Предположим, что Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку. С учётом ответа на предыдущий пункт найдите w и b , оптимальные для неё в этом случае.
- в) (2 балла)** А действительно ли Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку? Как устроен оптимальный контракт (w, b) с учётом ответа на этот вопрос?
- г) (4 балла)** Предположим теперь, что Старуха может наблюдать, что делает Старик у моря, и может поставить бонус $b \geq 0$ в зависимость от этого: если Старик выходил в море на лодке и поймал рыбку, то $b = b_1$, а если выходил, но не поймал, то $b = b_0$. Теперь Старуха предлагает Старика контракт (w, b_0, b_1) . Какой контракт будет оптимальным для Старухи?

Решение

а) В условии задачи слова «сумма долга» могут быть интерпретированы двумя способами: сумма, которой не хватает, чтобы оплатить аренду лодки, или вся арендная плата. Будем использовать первый вариант интерпретации в качестве основного.

Пусть заданы $w, b \geq 0$. Выигрыш Старика равен

- если он ловит рыбку:

$$U_1 = \begin{cases} \frac{w-5}{2} + \frac{w+b-5}{2} = w + \frac{b}{2} - 5, & \text{если } w \geq 5, \\ w - 5 + \frac{w+b-5}{2} = \frac{3w+b-15}{2}, & \text{если } w < 5 \leq w + b, \\ (w - 5) + (w + b - 5) = 2w + b - 10, & \text{если } w + b < 5; \end{cases}$$

- если он не ловит рыбку: $U_0 = w$.

Если $w + b < 5$, то $U_1 - U_0 = w + b - 10 < 0$, так что в этом случае лучше не ловить.

Если $w < 5 \leq w + b$, то $U_1 - U_0 = \frac{w+b-15}{2}$, так что в этом случае нужно ловить рыбку, если $w+b \geq 15$ (помним, что при безразличии надо ловить, так что неравенство нестрогое).

Если $w \geq 5$, то $U_1 - U_0 = \frac{b}{2} - 5$, так что в этом случае надо ловить, если $b \geq 10$.

Итого, надо ловить, если $b \geq \max\{15 - w, 10\}$.

Возможна альтернативная интерпретация условия задачи: если Старик не хватает монет, чтобы оплатить аренду лодки, то он платит в двойном размере всю арендную плату, т.е. платит 10 вместо 5. Тогда получается, что

$$U_1 = \begin{cases} w + \frac{b}{2} - 5, & \text{если } w \geq 5, \\ w + \frac{b}{2} - \frac{15}{2}, & \text{если } w < 5 \leq w + b, \\ w + \frac{b}{2} - 10, & \text{если } w + b < 5, \end{cases}$$

и Старик выходит в море при выполнении хотя бы одного из двух условий: $b \geq 15$ или $w \geq 5, b \geq 10$.

- б) Выигрыш Старухи, если Старик ловит рыбку, равен

$$\Pi_1 = \frac{12 - w - b}{2} - \frac{w}{2} = 6 - w - \frac{b}{2}.$$

Величину Π_1 надо максимизировать при ограничении $b \geq \max\{15 - w, 10\}$. Так как Π_1 убывает по b , это ограничение выполняется как равенство: $b = \max\{15 - w, 10\}$. Подставляя это в формулу для Π_1 , получаем

$$\Pi_1 = 6 - w - \frac{\max\{15 - w, 10\}}{2} = \min\left\{\frac{-w - 3}{2}, 1 - w\right\}.$$

Правая часть убывает по w , поэтому максимум Π_1 достигается при $w = 0$. Отсюда $b = 15$.

Возможно и другое рассуждение: необходимым условием выхода Старика в море за рыбкой является неравенство $w + b \geq 15$. Если бы действовало только это ограничение, то оптимум достигался бы при $w = 0, b = 15$, так как коэффициент при w

в функции прибыли Старухи равен -1 , а коэффициент при b меньше по модулю и равен $-\frac{1}{2}$. Но при $w = 0$, $b = 15$ выполнено и второе ограничение $b \geq 10$, так что это действительно решение задачи Старухи в условиях пункта б).

При альтернативной интерпретации условия задачи множество контрактов (w, b) , из которых выбирает Старуха в пункте б), сокращается по сравнению с основной интерпретацией, но контракт $w = 0$, $b = 15$ остаётся доступным и, следовательно, оптимальным. Ответы на пункты б), в), г) не зависят от выбора интерпретации.

в) Максимальное значение Π_1 , полученное в предыдущем пункте, равно $-\frac{3}{2}$. Это меньше, чем $\Pi_0 = 0$ — выигрыш Старухи, если она предлагает Старика $w = b = 0$, а тот, соответственно, не ловит рыбку. Так что $w = b = 0$ будет оптимальным контрактом. Кроме того, оптимальным будет и контракт с $w = 0$ и $b < 15$, поскольку он также стимулирует Старика не выходить в море и даёт Старухе нулевую прибыль.

г) Если Старуха хочет, чтобы Старик ловил рыбку, то она должна оставить его со средним выигрышем не меньшим, чем w . Для этого, даже если не учитывать возможные дополнительные расходы на возврат долга лодочнику, должно выполняться неравенство $\frac{w+b_0}{2} + \frac{w+b_1}{2} - 5 \geq w \Leftrightarrow b_0 + b_1 \geq 10$, а с учётом этих расходов данное неравенство тем более должно выполняться. Контракт (w, b_0, b_1) , удовлетворяющий этому неравенству, даёт Старухе выигрыш $\Pi = \frac{12}{2} - w - \frac{b_0+b_1}{2} \leq 1 - w \leq 1$. Максимально возможный выигрыш, равный 1, может быть получен с помощью контракта $(w, b_0, b_1) = (0, 5, 5)$. Это выгоднее для Старухи, чем не стимулировать Старика ловить рыбку (в этом случае её выигрыш был бы нулевым). Таким образом, $(0, 5, 5)$ является оптимальным контрактом.

Заметим, что никакой другой контракт не является оптимальным для Старухи. Действительно, для любого оптимального контракта перечисленные выше неравенства должны становиться равенствами: $w = 0$, $b_0 + b_1 = 10$. Если $(b_0, b_1) \neq (5, 5)$, то $b_i < 5$ для одного из $i = \{0, 1\}$. То есть у Старика будут дополнительные расходы на возврат долга, которые Старухе придётся компенсировать, из-за чего её прибыль уменьшится.

Схема проверки

Разбиение по баллам условное и относится к тому случаю, когда ход решения близок к изложенному выше. Если ход решения другой, но тоже правильный, то за пункт ставится полный балл.

а) Максимальная оценка за пункт — 3 балла:

- 1 балл за выписывание выигрышей Старика при каждом варианте действия Старика, параметров контракта и успеха/неудачи рыбной ловли;
- 1 балл за выписывание выигрышей Старика, усреднённых по успеху/неудаче;
- 1 балл за получение оптимального действия Старика в зависимости от w и b .

б) Максимальная оценка за пункт — 3 балла:

- 1 балл за выписывание задачи максимизации ожидаемой прибыли Старухи;
- 2 балл за её решение (например, 1 балл за установление того, что $b = \max\{15 - w, 10\}$ и 1 балл за остальное).

в) Максимальная оценка за пункт — 2 балла:

- 1 балл за оптимальный контракт, не стимулирующий Старика ловить рыбку;
- 1 балл за сравнение с контрактом из пункта б) и вывод об оптимальном контракте.

г) Максимальная оценка за пункт — 4 балла:

- 1 балл, если доказано, что ожидаемый выигрыш Старика должен быть равен w ;
- 1 балл, если доказано, что расходы на возврат долга отсутствуют;
- 1 балл, если доказано, что $w = 0$;
- 1 балл за получение окончательного ответа.

Другой ход решения оценивается соответственно, если он является корректным.