Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике г. Москва

октябрь 2020

В 4 и 5 классах олимпиада длилась 60 минут, в 6–8 классах — 90 минут, в 9–11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи.

Содержание

4 класс

Задача 4.1. На доске были написаны четыре арифметических примера. Вера стёрла один знак «плюс», один знак «минус», один знак «умножить», один знак «делить», а также четыре знака «равно».

Вместо одинаковых знаков она написала одинаковые буквы, а вместо разных знаков — разные буквы. Восстановите примеры.

$$4\ \boxed{A}\ 2\ \boxed{B}\ 2$$

$$8\ \boxed{B}\ 4\ \boxed{C}\ 2$$

$$2\ \boxed{D}\ 3\ \boxed{B}\ 5$$

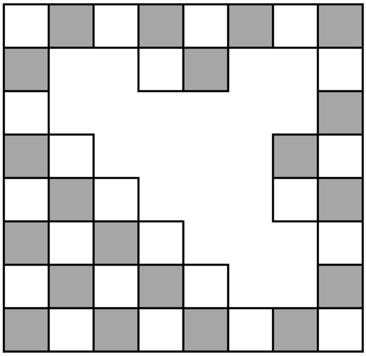
$$4\ \boxed{B}\ 5\ \boxed{E}\ 1$$

(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E

(1) должен стоять знак «плюс»
(2) должен стоять знак «умножить»
(3) должен стоять знак «минус»
(4) должен стоять знак «делить»
(5) должен стоять знак «равно»

Задача 4.2. У Пети есть 25 монет, каждая из которых имеет номинал 1, 2, 5 или 10 рублей. Среди этих монет 19 — не двухрублёвые, 20 — не десятирублёвые, 16 — не однорублёвые. Сколько пятирублёвых монет у Пети?

Задача 4.3. Термиты съели кусок старой деревянной шахматной доски. Сколько чёрных клеток они съели?



Задача 4.4. В очереди в столовую стоят пять школьников: Аня, Боря, Вера, Гена и Денис.

- Боря стоит в начале очереди.
- Вера стоит рядом с Аней, но не рядом с Геной.
- Среди Ани, Бори и Гены никакие двое не стоят рядом.

Кто стоит рядом с Денисом?

Задача 4.5. Антон загадал трёхзначное число, а Лёша пытается его угадать. Лёша по очереди назвал числа 109, 704 и 124. Антон заметил, что каждое из этих чисел совпадает с загаданным числом ровно в одном разряде. Какое число загадал Антон?

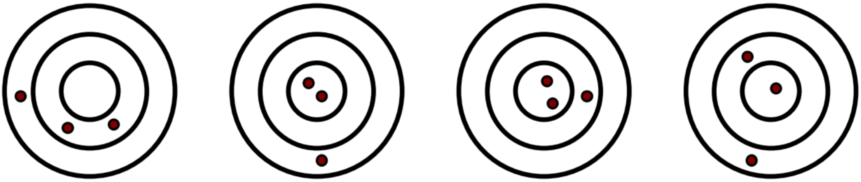
Задача 4.6. Впишите вместо букв A, B, C, D, E цифры 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы сумма цифр во всех прямоугольниках 1×3 (и горизонтальных, и вертикальных) равнялась 13. Каждая из цифр от 1 до 5 должна встречаться в таблице ровно один раз.

7	*A*	
B	**6**	*C*
D	*E*	**8**

(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E

(1) должна стоять цифра 1
(2) должна стоять цифра 2
(3) должна стоять цифра 3
(4) должна стоять цифра 4
(5) должна стоять цифра 5

Задача 4.7. Денис кидал дротики в четыре одинаковых поля для дартса: в каждое поле он кинул ровно три дротика, куда они попали, показано на рисунке. На первом поле он набрал 30 очков, на втором — 38 очков, на третьем — 41 очко. Сколько очков он набрал на четвёртом поле? (За попадание в каждую определённую зону — кольцо или центральное поле — даётся определённое количество очков.)



Задача 4.8. В роще растут деревья четырёх видов: березы, ели, сосны и осины. Всего 100 деревьев. Известно, что среди любых 85 деревьев найдутся деревья всех четырёх видов. Среди какого наименьшего количества любых деревьев в этой роще обязательно найдутся деревья хотя бы трёх видов?

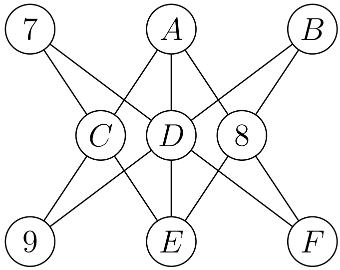
5 класс

Задача 5.1. После футбольного матча тренер построил команду в шеренгу, как показано на рисунке, и скомандовал: «В раздевалку бегут те, у кого номер меньше, чем у любого из соседей». После того, как несколько человек убежало, он повторил свою команду. Тренер продолжал до тех пор, пока не остался один игрок. Какой номер у Игоря, если известно, что после того как он убежал, в шеренге осталось 3 человека? (После каждой команды убегали один или несколько игроков, после чего шеренга смыкалась, и пустых мест между оставшимися игроками не оставалось.)

Задача 5.2. На урок физкультуры Алина, Богдан, Вика и Гриша пришли в шортах и футболках, причём каждый из этих предметов одежды был синего или красного цвета. У Алины и Богдана футболки были красные, а шорты — разного цвета. У Вики и Гриши футболки были разного цвета, а шорты — синие. Также известно, что у девочек футболки разные по цвету, да и шорты тоже. Кто из детей в какой одежде?

Задача 5.3. К первому сентября Влад купил себе несколько шариковых и гелевых ручек. Он заметил, что если бы все купленные ручки были гелевыми, то он заплатил бы в 4 раза больше, чем вышло у него. А если бы все ручки были шариковыми, то покупка обошлась бы в 2 раза дешевле реальной. Во сколько раз гелевая ручка дороже, чем шариковая?

Задача 5.4. Расставьте цифры от 1 до 6 (каждую нужно использовать ровно один раз) так, чтобы сумма трёх чисел, расположенных на каждой из 7 прямых, была равна 15. В ответе укажите, какие цифры должны стоять на местах A – F.



(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E
(f) Вместо буквы F

(1) должна стоять цифра 1
(2) должна стоять цифра 2
(3) должна стоять цифра 3
(4) должна стоять цифра 4
(5) должна стоять цифра 5
(6) должна стоять цифра 6

Задача 5.5. Дома Андрея, Бори, Вовы и Глеба расположены в некотором порядке на одной прямой улице. Расстояние между домами Андрея и Бори, как и расстояние между домами Вовы и Глеба, равно 600 м. Чему может равняться в метрах расстояние между домами Андрея и Глеба, если известно, что оно в 3 раза больше, чем расстояние между домами Бори и Вовы? Укажите все возможные варианты.

Если ответом являются несколько чисел, то они вводятся все — каждое число в отдельное поле ввода.

Задача 5.6. Ване на Новый Год подарили три набора конфет. В наборах три вида конфет: леденцы, шоколадные и мармеладные. Общее количество леденцов во всех трёх наборах равно общему количеству шоколадных конфет во всех трёх наборах, а также общему количеству мармеладных конфет во всех трёх наборах. В первом наборе шоколадных и мармеладных поровну, а леденцов на 7 больше. Во втором наборе леденцов и шоколадных одинаково, а мармеладных на 15 меньше. Сколько конфет в третьем наборе, если известно, что леденцов там нет?

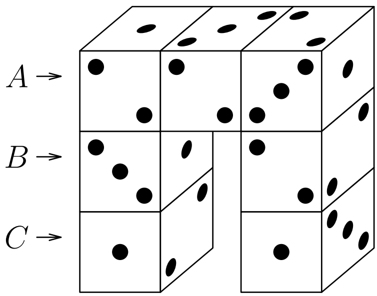
Задача 5.7. Мышонок Джерри решил подарить коту Тому на День Рождения пирог в виде квадрата 8×8. В три куска, отмеченные буквой «Р», он положил рыбу, в два куска, отмеченные буквой «К», положил колбасу, а ещё в один кусок добавил и то, и другое, но такой кусок не отметил (все остальные куски — без начинки). Также Джерри сообщил

Тому, что в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой, а в любом квадрате 3×3 — не более одного куска с колбасой.

Какое наименьшее количество кусков пирога надо съесть Тому, чтобы среди них гарантированно оказался кусок с рыбой и колбасой?

	Р						
	К						
				Р	К		
	Р						

Задача 5.8. Есть 7 абсолютно одинаковых кубиков, у которых отмечены на одной грани 3 точки, на двух гранях по 2 точки, на остальных по 1. Из этих кубиков склеили фигуру в виде буквы «П», изображённую на рисунке, причём количество точек на любых двух соприкасающихся гранях одинаково.

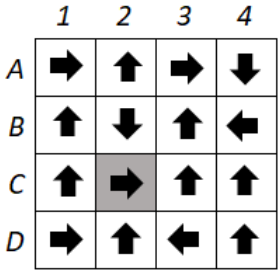


Что находится на трёх левых гранях A, B и C?

В системе 3 поля для ответов (вместо следующих многоточий): «на грани A стоит число ...», «на грани B стоит число ...», «на грани C стоит число ...».

6 класс

Задача 6.1. В квадрате 4×4 в отмеченной серым фоном клетке стоит фишка. За одно действие фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку, по направлению стрелочки, на которой стоит. Также после каждого перемещения стрелочка в клетке, где только что была фишка, меняется на противоположную. С какой клетки фишка выйдет за границу квадрата? В ответе укажите строку и столбец этой клетки.



(a) Строка A
(b) Строка B
(c) Строка C
(d) Строка D

(1) столбец 1
(2) столбец 2
(3) столбец 3
(4) столбец 4

Задача 6.2. В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов: A, B, C, D и E. Было сделано два прогноза, в каком порядке они финишируют.

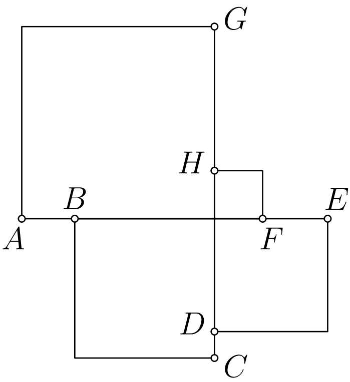
- Первый прогноз: A — первый, B — второй, C — третий, D — четвёртый, E — пятый.
- Второй прогноз: C — первый, E — второй, A — третий, B — четвёртый, D — пятый.

Оказалось, что первом прогнозе было верно предсказано ровно про троих спортсменов, а во втором — ровно про двоих. Кто какое место занял в забеге?

Задача 6.3. Три купца: Фома, Ерёма и Юлий встретились в Новгороде. Если Фома отдаст Ерёме 70 золотых монет, то у Ерёмы и Юлия будет поровну денег. Если Фома отдаст Ерёме 40 золотых монет, то у Фомы и Юлия будет поровну денег. Сколько золотых монет должен отдать Фома Ерёме, чтобы у них двоих стало поровну денег?

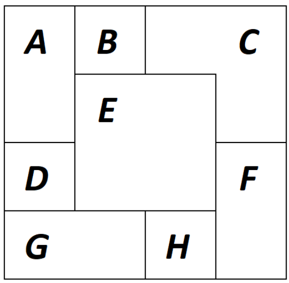
Задача 6.4. В прибрежной деревне 7 человек рыбачат каждый день, 8 человек рыбачат через день, 3 человека рыбачат раз в три дня, а остальные не рыбачат вовсе. Вчера рыбачили 12 человек, сегодня рыбачат 10 человек. Сколько людей будет рыбачить завтра?

Задача 6.5. На рисунке изображено 4 квадрата. Известно, что длина отрезка AB равна 11, длина отрезка FE равна 13, длина отрезка CD равна 5. Чему равна длина отрезка GH?



Задача 6.6. На фотографирование класса пришли 4 девочек и 8 мальчиков. Дети по двое подходят к фотографу и делают совместное фото. Среди какого наименьшего количества фотографий обязательно есть либо фотография двух мальчиков, либо фотография двух девочек, либо две фотографии с одними и теми же детьми?

Задача 6.7. Восемь бумажных квадратов 2×2 последовательно выкладывали на стол, пока не получился большой квадрат 4×4. Последним на стол положили квадрат E. На рисунке изображено, как видны квадраты: квадрат E видно полностью, остальные квадраты видно частично. Какой квадрат положили на стол третьим по счёту?

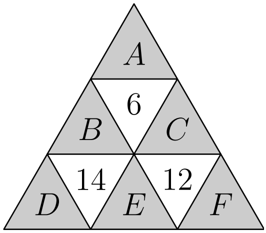


Задача 6.8. Натуральное число n назовём *хорошим*, если 2020 при делении на n даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

7 класс

Задача 7.1. Петя записал на доску 20 натуральных чисел $1, 2, \ldots, 20$. Вася сначала стёр все чётные числа, а затем стёр все числа, дающие остаток 4 при делении на 5. Сколько чисел осталось на доске?

Задача 7.2. Денис разбил треугольник на девять треугольничков, как показано на рисунке, и расставил в них числа, при этом в белых треугольниках числа оказались равны суммам чисел в соседних с ними (по сторонам) серых треугольниках. После этого Лёша стёр числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и вместо них написал буквы A, B, C, D, E и F в некотором порядке. Получившаяся расстановка чисел и букв изображена на рисунке.

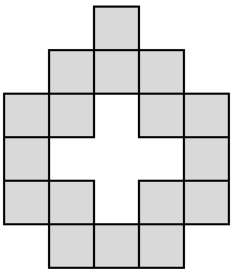


Где какие числа стояли первоначально?

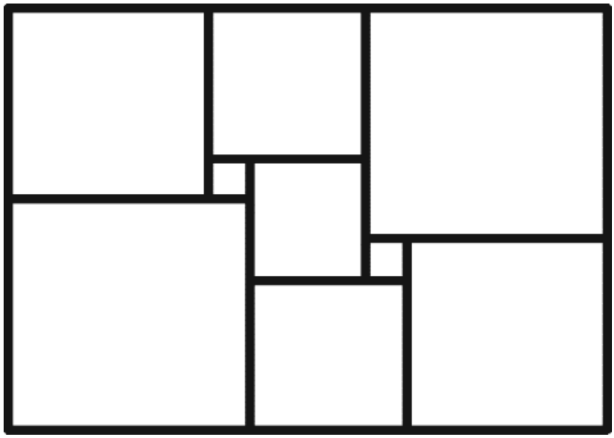
(a) Вместо буквы A	**(1)** стояло число 1.
(b) Вместо буквы B	**(2)** стояло число 2.
(c) Вместо буквы C	**(3)** стояло число 3.
(d) Вместо буквы D	**(4)** стояло число 4.
(e) Вместо буквы E	**(5)** стояло число 5.
(f) Вместо буквы F	**(6)** стояло число 6.

Задача 7.3. Листы в книге пронумерованы следующим образом: первый лист — это две страницы (с номерами 1 и 2), второй лист — это следующие две страницы (с номерами 3 и 4) и так далее. Хулиган Петя вырвал из книги несколько подряд идущих листов: первая вырванная страница имеет номер 185, а номер последней вырванной страницы состоит из тех же цифр, но идущих в другом порядке. Сколько листов вырвал Петя?

Задача 7.4. На рисунке изображена фигура, состоящая из 17 клеток. Сколько существует способов разрезать её на 8 прямоугольников 1×2 и один квадратик 1×1?



Задача 7.5. Прямоугольник разрезали на девять квадратов, как показано на рисунке. Длины сторон прямоугольника и всех квадратов — целые числа. Какое наименьшее значение может принимать периметр прямоугольника?



Задача 7.6. Расстояние между городами А и Б составляет целое число километров. На дороге между городами каждый километр стоит табличка: на одной стороне написано расстояние до города А, на другой — до города Б. Слава шёл пешком из города А в город Б. В течение своего путешествия Слава посчитал для каждой таблички НОД чисел, написанных на ней. Оказалось, что среди посчитанных НОДов встречаются только числа 1, 3 и 13. Чему равняется расстояние между городами?

Задача 7.7. В выборах на должность президента класса соревновались Петя и Вася. В течение трёх часов 27 учеников класса голосовали за одного из двух кандидатов. За первые два часа за Петю было отдано на 9 голосов больше, чем за Васю. А за последние два часа за Васю было отдано на 9 голосов больше, чем за Петю. В итоге Петя победил. С преимуществом в какое наибольшее количество голосов он мог победить?

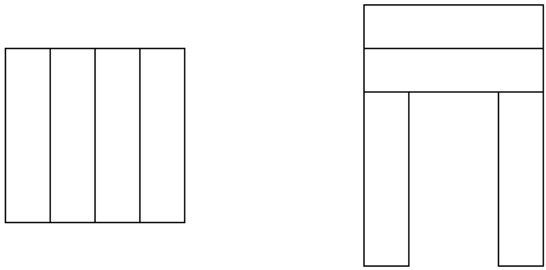
Задача 7.8. У Карлсона и Малыша есть несколько банок варенья, каждая весит целое число фунтов.

Суммарный вес всех банок варенья Карлсона в 13 раз больше суммарного веса всех банок Малыша. Карлсон отдал Малышу банку с наименьшим весом (из тех, что были у него), после чего суммарный вес его банок оказался в 8 раз больше суммарного веса банок Малыша.

Какое наибольшее количество банок варенья могло изначально быть у Карлсона?

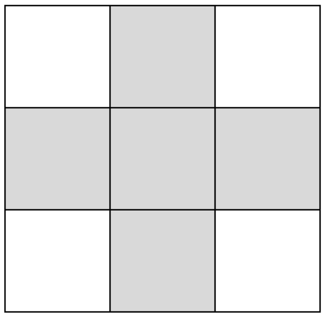
8 класс

Задача 8.1. Квадрат разрезали на четыре равных прямоугольника, а из них сложили большую букву П (см. рисунок), периметр которой равен 56.



Чему равен периметр первоначального квадрата?

Задача 8.2. Числа от 1 до 9 расставили в клетки таблицы 3×3 так, что сумма чисел на одной диагонали равна 7, а на другой — 21. Чему равна сумма чисел в пяти закрашенных клетках?



Задача 8.3. Четверо ребят гуляли вдоль аллеи и решили посчитать количество елей, высаженных вдоль неё.

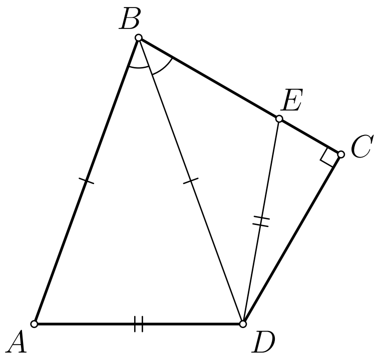
- Аня сказала: «Вдоль аллеи всего 15 елей.»
- Боря сказал: «Количество елей делится на 11.»
- Вера сказала: «Елей точно меньше 25.»
- Гена сказал: «А я уверен, что их количество делится на 22.»

Один мальчик и одна девочка сказали правду, а остальные двое ошиблись. Сколько елей растёт вдоль аллеи?

Задача 8.4. В классе учатся 20 человек. Размышляя, каким девочкам отправить валентинку на 14 февраля, каждый мальчик составил список из всех симпатичных ему девочек-одноклассниц (возможно, пустой). Известно, что не существует трёх мальчиков, у которых списки совпадают по количеству девочек. Какое наименьшее количество девочек может быть в классе?

Задача 8.5. На бал пришли дамы и джентльмены — всего меньше 50 человек. Во время первого танца лишь четверть дам не были приглашены на танец, и 2/7 от общего количество джентльменов никого не пригласили. Сколько человек пришло на бал? (Для танца некоторый джентльмен приглашает некоторую даму.)

Задача 8.6. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BCD = 90°$. На отрезке BC отмечена точка E такая, что $AD = DE$. Чему равна длина отрезка BD, если известно, что $BE = 7$, $EC = 5$?



Задача 8.7. Про три действительных числа p, q и r известно, что

$$p + q + r = 5, \qquad \frac{1}{p+q} + \frac{1}{q+r} + \frac{1}{p+r} = 9.$$

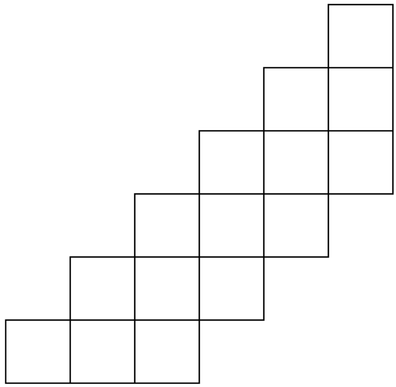
Чему равняется выражение

$$\frac{r}{p+q} + \frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r}?$$

Задача 8.8. Маша выписала на доску в порядке возрастания все натуральные делители некоторого числа N (самый первый выписанный делитель — 1, самый большой выписанный делитель — само число N). Оказалось, что третий с конца делитель в 21 раз больше второго с начала. Какое наибольшее значение может принимать N?

9 класс

Задача 9.1. Фигуру, изображённую на рисунке, разрезали на одноклеточные квадраты и прямоугольники 1×2. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×2 при этом могло получиться?



Задача 9.2. Антон, Вася, Саша и Дима ехали на машине из города А в город Б, каждый из них по очереди был за рулём. Весь путь машина ехала с постоянной скоростью.

Антон вёл машину в два раза меньше, чем Вася, а Саша вёл машину столько же, сколько Антон и Дима вместе взятые. Дима был за рулём лишь десятую часть пути. Какую часть пути за рулём был Вася? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

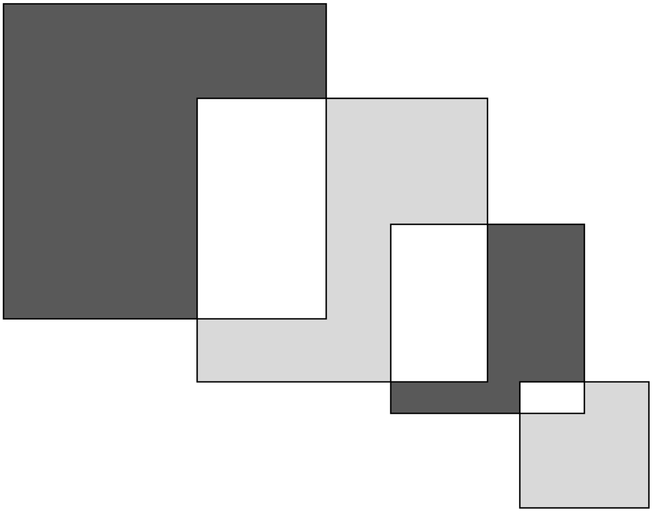
Задача 9.3. К 30 пальмам в разных частях необитаемого острова прибито по табличке.

- На 15 из них написано: «Ровно под 15 табличками зарыт клад».
- На 8 из них написано: «Ровно под 8 табличками зарыт клад».
- На 4 из них написано: «Ровно под 4 табличками зарыт клад».
- На 3 из них написано: «Ровно под 3 табличками зарыт клад».

Известно, что правдивы только те таблички, под которыми клада нет.

Под каким наименьшим количеством табличек может быть зарыт клад?

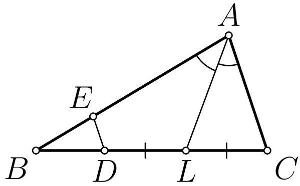
Задача 9.4. На рисунке слева направо изображены пересекающиеся квадраты со сторонами 12, 9, 7, 3 соответственно. На сколько сумма чёрных площадей больше, чем сумма серых площадей?



Задача 9.5. У Буратино есть много монет по 5 и по 6 сольдо, каждого вида более 10 монет. Придя в магазин и купив книгу за N сольдо, он понял, что не сможет за неё рассчитаться без сдачи. Какое наибольшее значение может принимать натуральное N, если оно не больше 50?

Задача 9.6. На бал пришли 29 мальчиков и 15 девочек. Некоторые мальчики потанцевали с некоторыми девочками (не более одного раза в каждой паре). После бала каждый человек рассказал родителям, сколько раз он танцевал. Какое наибольшее количество различных чисел дети могли назвать?

Задача 9.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точки E и D отмечены на отрезках AB и BL соответственно так, что $DL = LC$, $ED \parallel AC$. Найдите длину отрезка ED, если известно, что $AE = 15$, $AC = 12$.

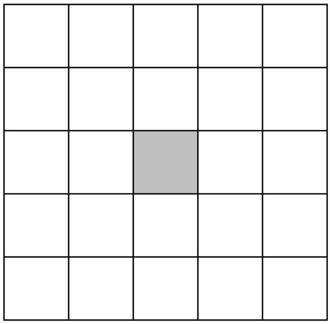


Задача 9.8. Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что $a \geqslant b$ и выполнено

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}?$$

10 класс

Задача 10.1. В каждую клетку таблицы 5×5 невидимыми чернилами вписано натуральное число. Известно, что сумма всех чисел равна 200, а сумма трёх чисел, находящихся внутри любого прямоугольника 1×3, равна 23. Чему равно центральное число в таблице?



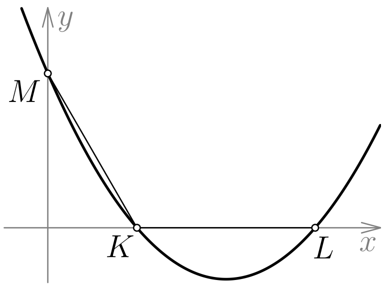
Задача 10.2. Известно, что $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Задача 10.3. У Юры есть n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. После того, как Юра потерял одну из них, сумма чисел на оставшихся оказалась равна 101. Какое число написано на потерянной карточке?

Задача 10.4. В центральной клетке доски 21×21 находится фишка. За один ход можно передвинуть фишку в соседнюю по стороне клетку. Алина сделала 10 ходов. Сколько существует клеток, где может оказаться фишка?

Задача 10.5. Хулиган Вася любит бегать по эскалатору в метро, причём вниз он бежит в два раза быстрее, чем вверх. Если эскалатор не работает, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 6 минут. Если эскалатор едет вниз, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 13,5 минут. Сколько секунд потребуется Васе, чтобы сбегать вверх и вниз по эскалатору, который будет ехать вверх? (Эскалатор всегда движется с постоянной скоростью.)

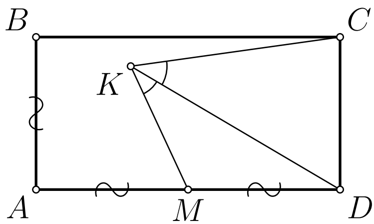
Задача 10.6. График квадратного трёхчлена $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трёх точках K, L и M, как на рисунке ниже. Оказалось, что $KL = KM$ и $\angle LKM = 120°$. Найдите корни данного трёхчлена.



В качестве ответа введите 2 *числа в произвольном порядке — каждое число в отдельное поле ввода.*

Задача 10.7. У Олега есть четыре карточки, на каждой из которых с одной и с другой стороны написаны натуральные числа (всего написано 8 чисел). Он рассматривает всевозможные четвёрки чисел, где первое число написано на первой карточке, второе — на второй, третье — на третьей, четвёртое — на четвёртой. Затем для каждой четвёрки он выписывает произведение чисел к себе в блокнот. Чему равна сумма восьми чисел на карточках, если сумма шестнадцати чисел в блокноте Олега равна 330?

Задача 10.8. Прямоугольник $ABCD$ таков, что $AD = 2AB$. Точка M — середина стороны AD. Внутри прямоугольника нашлась точка K такая, что $\angle AMK = 80^\circ$ и луч KD является биссектрисой угла MKC. Сколько градусов составляет угол KDA?



11 класс

Задача 11.1. Внутри круга нарисовано 16 радиусов этого круга и 10 окружностей, центры которых совпадают с центром круга. На сколько областей радиусы и окружности делят круг?

Задача 11.2. Вдоль дороги в один ряд стоят 25 столбов. Иногда на один из столбов садится чиж, и сразу же с одного из соседних столбов взлетает чиж (если на соседних столбах в этот момент хоть кто-нибудь сидел). Также на каждом столбе не может сидеть более одного чижа.

Первоначально на столбах нет птиц. Какое наибольшее количество чижей могут одновременно находиться на столбах?

Задача 11.3. Натуральное число n назовём *интересным*, если $2n$ является точным квадратом, а $15n$ — точным кубом. Найдите наименьшее интересное число.

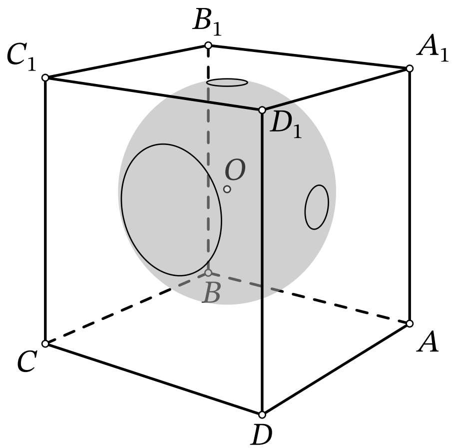
Задача 11.4. У Сени есть три прямых палки длиной 24 сантиметра каждая. Сеня разломил одну из них на две части так, что из двух кусков этой палки и двух целых палок он смог выложить контур прямоугольного треугольника. Сколько квадратных сантиметров составляет площадь этого треугольника?

Задача 11.5. По зову воеводы пришли 55 солдат: лучники и мечники. Все они были одеты либо в золотые, либо в чёрные доспехи. Известно, что мечники говорят правду, когда носят чёрные доспехи и обманывают, когда носят золотые доспехи, а лучники — наоборот.

- На вопрос «На тебе золотые доспехи?» утвердительно ответили 44 человека.
- На вопрос «Ты лучник?» утвердительно ответили 33 человека.
- На вопрос «Сегодня понедельник?» утвердительно ответили 22 человека.

Сколько пришло лучников в золотых доспехах на зов воеводы?

Задача 11.6. Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен центр O сферы радиуса 10. Сфера пересекает грань AA_1D_1D по окружности радиуса 1, грань $A_1B_1C_1D_1$ по окружности радиуса 1, грань CDD_1C_1 по окружности радиуса 3. Найдите длину отрезка OD_1.



Задача 11.7. При каком наименьшем натуральном x выражение

$$\sqrt{29+\sqrt{x}}+\sqrt{29-\sqrt{x}}$$

является целым?

Задача 11.8. Дана возрастающая последовательность из 8 действительных чисел. Диана выписала всевозможные последовательности из 4 чисел, идущих в ней подряд. Оказалось, что две из пяти новых последовательностей являются арифметическими прогрессиями с разностями 4 и 36 соответственно, а одна из последовательностей является геометрической прогрессией. Найдите наибольшее из данных 8 чисел. Укажите все возможные варианты.