10 класс

Второй день

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

10.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

10.8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geqslant 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

10.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

XLVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

10.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

10.8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geqslant 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

10.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?