Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

6 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

(*И. Богданов, П. Кожевников*)

Ответ. 30.

Решение. Заметим, что в числе $a+b$ не более 11 разрядов, таким образом всего на доске выписано не более 31 цифры. При этом все три числа a, b, $a+b$ не могут оказаться одновременно нечётными. Следовательно, одна из их трёх последних цифр — чётная, поэтому нечётных цифр выпсано не более 30.

Приведём пример, показывающий, что нечётных цифр могло оказаться ровно 30:

$5\,555\,555\,555 + 5\,555\,555\,555 = 11\,111\,111\,110.$

Замечание. Примеров с 30 нечётными цифрами много — например, $3\,999\,999\,999 + 7\,999\,999\,999 = 11\,999\,999\,998$.

Комментарий. Только ответ без каких-либо верных пояснений — 0 баллов. Только доказательство того, что нечётных цифр не более 30 — 3 балла. Только верный пример с 30 нечётными цифрами — 4 балла.

10.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y-x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x<y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \ldots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y - x$ чётно. Значит, $y - x$ делится на 6.

Комментарий. Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

По сути верное решение задачи получается из двух соображений:

(а) Все клетки разбиваются на 3 цепочки клеток: $1 - 4 - 7 - \ldots - 79$, $2 - 5 - 8 - \ldots - 80$, $3 - 6 - 9 - \ldots - 81$, поэтому какие-то две угловые клетки принадлежат одной цепочке.

(б) Любой путь от одной угловой клетки до другой угловой клетки состоит из чётного количества ходов (переходов в соседнюю клетку).

Если в работе присутствует только одно из этих двух соображений (а), (б) — ставится оценка 3 балла.

Замечание. Отметим, что (б) можно доказать и без использования шахматной раскраски: так как общее перемещение по горизонтали или вертикали чётно, то чётным будет общее количество ходов каждого из направлений (горизонтальных или вертикальных).

10.8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются. (*А. Кузнецов*)

Решение. Проведем биссектрису m угла BCD. По построению, B и D, а также M и K симметричны относительно m.

Из симметрии, BM и DK пересекаются в точке X, лежащей на m. Так как $XM \perp CM$, то $XK \perp CK$, значит, X лежит на окружности (CMK), причём CX — диаметр этой окружности.

Далее $\angle BXD = \angle MXK = 180^\circ - \angle MCK = \angle BCA = \angle BAC = \angle BAD$, поэтому X лежит на окружности (ABD).

Так как m — серединный перпендикуляр к BD, то центр окружности (ABD) лежит на m. Но тогда X лежит на каждой из окружностей (CMK), (ABD) и на их линии центров, следовательно, эти окружности касаются друг друга в точке X.

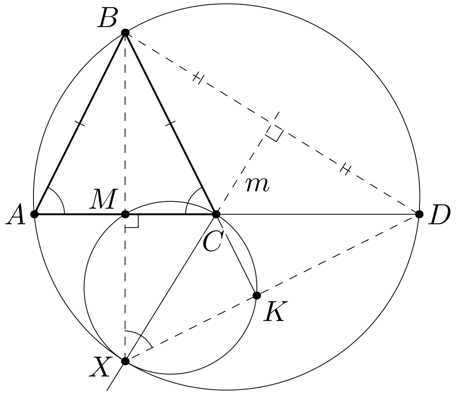

Рис. 4

Комментарий. (a) Заявлено верное описание точки касания X (без доказательства касания) как $BM \cap DK$, либо как точки пересечения BM или DK с биссектрисой угла BCD — 1 балл.

(b) Доказано, что окружность (CMK) проходит через X — 1 балл.

(c) Доказано, что окружность (ABD) проходит через X — 1 балл.

Если в работе есть несколько из продвижений (a), (b), (c), то баллы за них суммируются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geqslant 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. При всех n.

Решение. Приведём одну из возможных договорённостей фокусника и помощника. Отметим самое левое место знаком $*$ (карточку на нём перевернёт фокусник). Пронумеруем все остальные места числами от 1 до $n-1$; фокусник и помощник будут считать, что эти места расположены по циклу, то есть место 1 следует за местом $n-1$.

Если на месте $*$ лежит карточка 1 или 2 (пусть для определённости это карточка 1), то помощник выкладывает все свои карточки по возрастанию по циклу за картой 2. Тогда фокусник, увидев карту на месте $*$, восстанавливает циклический порядок всех остальных карт (то есть их порядок с точностью до сдвига по циклу), и по любой карте, открытой зрителем, фокусник сможет определить расположения всех карт.

Пусть теперь карты 1 и 2 лежат в цикле. Тогда помощник считает количество мест i, на которое надо сдвинуться по циклу, чтобы от карточки 1 добраться до карточки 2; тогда $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Далее помощник кладёт на место $*$ карточку $i+2$. Остальные же карточки он выкладывает по возрастанию по циклу за карточкой 1, пропуская место карточки 2. Увидев карточку на месте $*$, фокусник узнаёт число i. По нему он опять же восстанавливает циклический порядок карт на остальных местах, и по любой открытой зрителем карточке он может определить места всех остальных.

Замечание. Существуют и другие стратегии. Однако все работающие стратегии должны обладать следующими свойствами.

Как и в решении выше, обозначим через $*$ место, карточку на котором перевернёт фокусник. Существует $n(n-1)$ возможных расположений карточек 1 и 2; значит, есть столько же возможных расположений всех карт, которые получаются после действий помощника. При этом, для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ карточка i должна оказаться на месте $*$ ровно в $n-1$ из этих расположений. Более того, в этих $n-1$ расположениях любая карточка $j \neq i$ должна располагаться на различных $n-1$ местах (отличных от $*$).

(Выполнения последнего свойства легче всего добиться, сделав так, чтобы эти расположения отличались циклическими сдвигами карточек на местах, отличных от $*$, как в решении выше; можно этого, однако, добиться и другими методами.)

Комментарий. За ответ без обоснования и/или разбор нескольких частных случаев (для небольших значений n) баллы не начисляются.

В решении лишь изложена структура стратегии фокусника с помощником, описанная в комментарии выше (с доказательством, что она должна быть именно такой, или без такого доказательства) — 2 балла.

В работе приведена стратегия, работающая для *бесконечного* множества значений n, с доказательством, что она работает — не менее 3 баллов. При этом, если стратегия *не работает* также для бесконечного множества значений n — ровно 3 балла.

10.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\dfrac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Назовём набор из n чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Предположим, что красивый набор из $n > 100$ чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

Заметим, что если разность полученной прогрессии $d > 0$ имеет общий простой делитель p с каким-нибудь её членом, то все члены этой прогрессии делятся на p, а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на p. Разделим все эти числа на p (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на p и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, то есть также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел выбранного набора. Следовательно, d взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть a — максимальное число нашего красивого набора; тогда $a \geqslant n$. В прогрессии на доске будет не менее $n-1$ членов, кратных a. У каких-то двух из них номера отличаются не более, чем на $\frac{n(n-1)}{2} : (n-2) < n$, то есть разность этих членов (также делящаяся на a) равна kd при некотором $k \leqslant n-1 < a$. Но d взаимно просто с a, поэтому kd не может делиться на a — противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем красивый набор с наименьшей суммой и докажем, что разность прогрессии d взаимно проста с любым числом из набора. Далее нам понадобится следующий стандартный факт.

Лемма. *Пусть разность d арифметической прогрессии натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$ взаимно проста с числом k. Тогда числа, кратные k, идут в этой прогрессии с шагом k (то есть существует такое $i \leqslant k$, что члены, кратные k — это в точности $x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, \ldots$).*

Доказательство. Разности членов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют вид sd при $s < k$, и они не делятся на k. Поэтому все эти члены дают разные остатки при делении на k; значит, они дают все возможные остатки, и один из наших членов делится на k — пусть это x_i. Тогда член x_{i+t} будет делиться на k тогда и только тогда, когда $dt \,\vdots\, k$, то есть когда $t \,\vdots\, k$. □

Пусть теперь p — простой делитель какого-то числа из нашего набора, а p^s — наибольшая степень p, делящая число набора. Пусть a — число из набора, делящееся на p^s. Хотя бы $n-1$ член прогрессии делится на a (и, как следствие, на p^s). Но разность прогрессии не делится на p; значит, лишь каждый p^s-й её член делится на p^s. Значит, в прогрессии хотя бы $p^s(n-2)+1$ членов, то есть $p^s(n-2)+1 \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$, откуда $p^s < n$.

С другой стороны, ни один из как минимум $n-1$ членов прогрессии, делящихся на p^s, не делится на p^{s+1}. Это значит, что количество таких членов меньше p, то есть $n-1 \leqslant p-1$, или $n \leqslant p$. Это противоречит неравенству выше.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда разность прогрессии взаимно проста с каждым её членом — 2 балла.

Лемма из второго решения считается известной; при отсутствии доказательства её (или её аналогов) баллы не снимаются.