5 класс (решения)

Задача 5.1. Денис расставил числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3 так, что сумма чисел во всех строках и во всех столбцах равна 15. А Лёша стёр числа от 1 до 5 и вместо них написал буквы A, B, C, D и E. Получившийся квадрат изображён на рисунке.

9	*A*	*B*
C	6	7
D	8	*E*

Где какие числа стояли первоначально?

(a) Вместо буквы A
(b) Вместо буквы B
(c) Вместо буквы C
(d) Вместо буквы D
(e) Вместо буквы E

(1) стояло число 1.
(2) стояло число 2.
(3) стояло число 3.
(4) стояло число 4.
(5) стояло число 5.

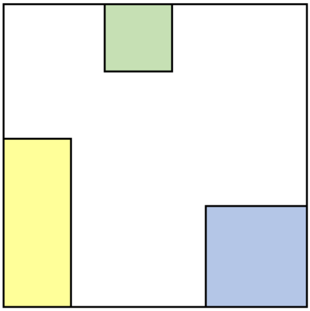
Ответ: a1 b5 c2 d4 e3.

Решение. Посмотрим на вторую строку. Сумма чисел в ней равна $C + 6 + 7 = 15$, откуда $C = 2$. Аналогично во втором столбце имеем сумму чисел $A + 6 + 8 = 15$, откуда $A = 1$.

Теперь можно выписать суммы чисел в первой строке и в первом столбце — это $9+1+B = 15$ и $9 + 2 + D = 15$. Из них получаем, что $D = 4$ и $B = 5$. Осталось только из суммы чисел в последнем столбце $5 + 7 + E = 15$ найти, что $E = 3$. □

Задача 5.2. Из квадрата со стороной 10 вырезали зелёный квадрат со стороной 2, синий квадрат и жёлтый прямоугольник (см. рисунок). Чему равен периметр оставшейся фигуры?

Периметр фигуры — сумма длин всех её сторон.



Ответ: 44.

Решение. Будем последовательно вырезать из первоначального квадрата с периметром 40 наши фигуры.

- После вырезания жёлтого прямоугольника получается фигура такого же периметра, что и первоначальный квадрат.
- Далее мы отрезаем синий квадрат, и опять получается фигура такого же периметра.
- Последним действием отрезаем зелёный квадрат, и периметр увеличивается на удвоенную сторону зелёного квадрата, то есть на 4. □

Задача 5.3. Ирина плохо учила математику в начале учебного года, поэтому в журнале у неё стояло 3 тройки и 2 двойки. Но в середине октября она собралась с силами и начала получать только пятёрки. Какое минимальное количество пятёрок нужно получить Ирине, чтобы её средний балл стал в точности равен 4?

Ответ: 7.

Решение. Пусть Ирине необходимо получить x пятёрок. Тогда сумма её оценок будет равна $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 5x = 5x + 13$, а количество оценок — $3 + 2 + x = x + 5$.

Получается уравнение

$$(5x + 13) : (x + 5) = 4\,;$$
$$5x + 13 = 4(x + 5)\,;$$
$$5x + 13 = 4x + 20\,;$$
$$x = 7\,.$$

□

Задача 5.4. Алёна, Боря, Вера и Полина собирали яблоки в саду. Кто-то из них собрал 11 яблок, другой — 17, третий — 19, четвёртый — 24. Известно, что

- одна из девочек собрала 11 яблок;

- Алёна собрала яблок больше, чем Боря;
- суммарное количество яблок, собранное Алёной и Верой, делится на 3.

Кто сколько яблок собрал?

(a) Алёна собрала	**(1)** 11 яблок.
(b) Боря собрал	**(2)** 17 яблок.
(c) Вера собрала	**(3)** 19 яблок.
(d) Полина собрала	**(4)** 24 яблока.

Ответ: a3 b2 c1 d4.

Решение. Суммарное количество яблок, собранное Алёной и Верой, делится на 3. Таким образом, если Алёна собрала 24 яблока, то количество яблок, собранных Верой, тоже должно делиться на 3; но среди наших чисел нет других, кратных 3, так что это невозможно.

Так как Алёна собрала яблок больше, чем Боря, то она собрала либо 17, либо 19 яблок. Но если она собрала 17 яблок, то Боря должен был собрать 11 яблок, а по условию задачи 11 яблок собрала одна из девочек.

Таким образом, Алёна собрала 19 яблок, а Боря — 17. Из оставшихся двух чисел только 11 в сумме с 19 даёт число, кратное 3. Получается, Вера собрала 11 яблок, а Полина — 24 яблока. □

Задача 5.5. На некоторых деревьях в волшебном лесу растут монеты. Деревьев, на которых вообще не растут монеты, в два раза больше, чем деревьев, на которых растут по три монеты. На трёх деревьях растут по 2 монеты, на четырёх деревьях — по 4 монеты, а больше, чем по 4 монеты, ни на каком дереве не растёт. На сколько общее число монет в волшебном лесу больше, чем число деревьев?

Ответ: 15.

Решение. Пусть в лесу растёт x деревьев, на которых растут по три монеты, и y деревьев, на которых растёт по одной монете. Тогда в лесу $2x$ деревьев, на которых не растут монеты вовсе.

Получается, что общее количество монет равно

$$2x \cdot 0 + y \cdot 1 + 3 \cdot 2 + x \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 3x + y + 22,$$

а общее число деревьев равно

$$2x + y + 3 + x + 4 = 3x + y + 7.$$

Первое число больше второго на 15. □

Задача 5.6. В зоопарке есть красные, жёлтые и зелёные попугаи (есть хотя бы по одному попугаю каждого из перечисленных цветов; попугаев других цветов в зоопарке нет). Известно, что среди любых 10 попугаев обязательно есть красный, а среди любых 12 попугаев обязательно есть жёлтый. Какое наибольшее количество попугаев может быть в зоопарке?

Ответ: 19.

Решение. Пусть в зоопарке x красных, y жёлтых и z зелёных попугаев.

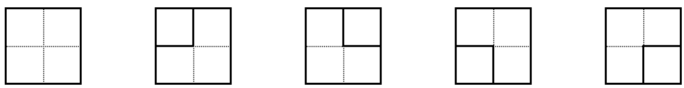
Раз среди любых 10 попугаев есть красный, то не красных попугаев не более 9, то есть $y+z \leqslant 9$. По аналогичным соображением мы получаем, что не жёлтых попугаев не более 11, то есть $x+z \leqslant 11$.

Таким образом,

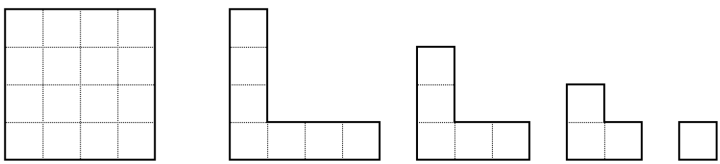
$$x + y + 2z = (y + z) + (x + z) \leqslant 9 + 11 = 20\,;$$
$$x + y + z \leqslant 20 - z \leqslant 19\,.$$

Это означает, что общее число попугаев не превосходит 19. При этом в зоопарке могли быть 10 красных, 8 жёлтых и 1 зелёный попугай, то есть ровно 19 попугаев. □

Задача 5.7. Квадрат 2×2 можно разрезать на маленький квадратик и уголок четырьмя способами. Все способы разрезания показаны на рисунке ниже.

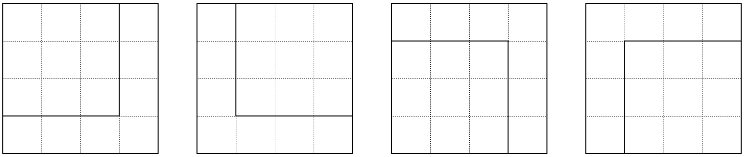


Сколько существует способов разрезать квадрат 4×4 на три уголка и маленький квадратик, изображённые на рисунке? (Способы, отличающиеся поворотом или переворотом квадрата, считаются различными.)



Ответ: 64.

Решение. Есть четыре способа отрезать от квадрата 4×4 самый большой уголок, изображенных на рисунке ниже.



После этого остаётся квадрат 3×3. Аналогично, есть четыре способа, как можно отрезать от него второй по величине уголок. И от оставшегося квадрата 2×2 можно отрезать маленький уголок также четырьмя способами.

Получается ответ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. $\square$

Задача 5.8. Хвастливый рыбак каждый день говорит одну и ту же фразу: «Сегодня я поймал пескарей больше, чем позавчера (2 дня назад), но меньше, чем 9 дней назад.» Какое наибольшее количество дней подряд он может говорить правду?

Ответ: 8.

Решение. Сначала приведём пример, в котором он говорит правду 8 дней подряд. Указаны количества пескарей, которые он выловил в последовательные дни:

$$20\ 20\ 20\ 20\ 20\ 20\ 20\ 6\ 1\ \underbrace{7\ 2\ 8\ 3\ 9\ 4\ 10\ 5}_{\text{правда}}.$$

Теперь докажем, что 9 дней подряд говорить правду он не мог. Предположим, что он это сделал. Обозначим правдивые дни за 3-й, ..., 11-й, предыдущий день за 2-й, а предпредыдущий за 1-й.

Тогда в 10-й день он выловил больше, чем в 8-й, что больше, чем в 6-й, в 4-й и во 2-й. При этом в 11-й день он выловил меньше, чем в 2-й, так как это было ровно 9 дней назад. Следовательно, в 11-й день он выловил меньше, чем в 10-й.

С другой стороны, в 11-й день рыбак выловил больше, чем в 9-й, что больше, чем в 7-й, 5-й, 3-й и 1-й. При этом в 10-й день он выловил меньше, чем в 1-й. Это означает, что в 10-й день он выловил меньше, чем в 11-й, что противоречит ранее полученному выводу. $\square$