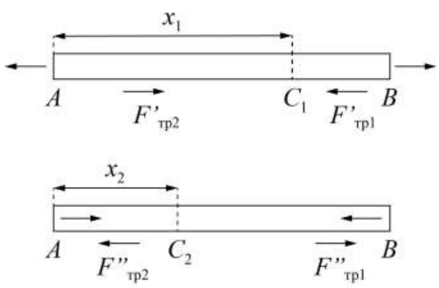
Решение

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 ?? В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?



при изменении длины полоски в результате нагрева или охлаждения различные участки полоски движутся относительно стола в противоположных направлениях. При этом существует точка, неподвижная относительно стола. Положение такой точки определяется из условия равенства действующей на полоску результирующей силы трения. Пусть расстояние этой точки от левого конца полоски при нагреве (т. C_1) равно x_1, при охлаждении (т. C_2) - x_2 (рис.2)

При нагреве

$$F_{\text{тр}1}{}' = F_{\text{тр}2}{}'$$

$$\mu_1 m \frac{l - x_1}{l} g = \mu_2 m \frac{x_1}{l} g$$

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} l$$

Левый край полоски (т.A) сместится в результате нагрева на ΔT влево на расстояние

$$x' = x_1 \alpha \Delta T.$$

При охлаждении аналогично

$$F_{\text{тр}1}{}'' = F_{\text{тр}2}{}''$$

$$\mu_1 m \frac{x_2}{l} g = \mu_2 m \frac{l - x_2}{l} g$$

$$x_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l$$

А левый край полоски смещается вправо на

$$x'' = x_2 \alpha \Delta T$$

За один цикл нагрев-охлаждение левый край и вся полоска сместятся влево на расстояние

$$\Delta x = x' - x'' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l \alpha \Delta T$$

Учитывая, что $\mu_2 < \mu_1$ получаем, что $\Delta x > 0$, значит полоска смещается влево.

Ответ: Влево

2 ?? На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.

Ответ: За N циклов смещение полоски составит

$$\Delta X = N \Delta x = N \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} l \alpha \Delta T$$

3[??] Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20\text{см}$ за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80^\circ\mathrm{C}$. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.05$.

Ответ: $\Delta X = 16\text{см}$

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 ?? В каком направлении (AB или BA) сместится полоска при большом количестве циклов?

Указано или используется, что при нагреве и охлаждении существует неподвижная в ЛСО точка	0.50
Указано или используется, что неподвижная точка - не середина полоски и не ее конец. Комментарий: если одновременно несколько точек неподвижны, то 0 б. за этот пункт. Комментарий: последующие критерии не засчитываются при 0 б. за этот пункт	0.50
Равенство сил трения (хотя бы в одном из процессов), например: $F'_{\text{тр}1} = F'_{\text{тр}2}$. Комментарий: засчитывается автоматом, если записано сразу $\mu_1 m\frac{l-x_1}{l}g = \mu_2 m\frac{x_1}{l}g$	2.00
Силы трения выражены через длины: $$F'_{\text{тр}1} = \mu_1 m\frac{l-x_1}{l}g,$$ $$F'_{\text{тр}2} = \mu_2 m\frac{x_1}{l}g$$. Комментарий: засчитывается автоматом, если записано сразу $\mu_1 m\frac{l-x_1}{l}g = \mu_2 m\frac{x_1}{l}g.$ Комментарий: при перепутанных коэффициентах трения не засчитывается этот пункт и ответ про направление, а остальные пункты оцениваются. Комментарий: если рассуждение основано на равенстве работ, то этот пункт может быть оценен, а все последующие - 0 б.	2 × 0.50
Нагрев: неподвижная точка на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}l$ от левого края, $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l$ от правого края	1.00
Нагрев: смещение левого края на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$, либо правого края на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$, либо центра	0.50
Охлаждение: неподвижная точка на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l$ от левого края, $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}l$ от правого края	1.00
Охлаждение: смещение левого края на $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$, либо правого края на $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$, либо центра. Комментарий: допускаются ошибки в $(1 \pm \alpha\Delta T)$ раз - из-за неточного использования α, определенного в условии.	0.50
Верный ответ: смещается влево. Комментарий: необходимо качественное или количественное обоснование	2.00
Верный ответ: смещение полоски на $\Delta X = N\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$. Комментарий: допускается только ошибка в знаке направления, при других ошибках в окончательной формуле она не засчитывается	2.00
Получена верная формула $\Delta x = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}l\alpha\Delta T$, но в ответ не включен множитель N	-0.50
Верный численный ответ: $\Delta X = 16$см. Комментарий: засчитывается только при засчитанном буквенном ответе	1.00

2 ?? На какое расстояние переместится полоска за N циклов нагревания-охлаждения, если разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT? Ответ запишите в виде формулы.

3 ?? Вычислите, на какое расстояние переместится полоска длины $l = 20$см за $N = 100$ циклов нагрева-охлаждения при изменении ее температуры на $\Delta T = 80^\circ$C. Значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0.15$, $\mu_2 = 0.05$.

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;

Поскольку система находится в стационарном состоянии, то масса газа в трубе в любой момент постоянна. Значит масса газа втекающего в трубу за малое время dt должна равняться массе вытекающего газа

$$\rho_1 S v_1 dt = \rho_2 S v_2 dt = \mu dt,$$

где μ - массовый расход газа.
\newline
Так как сечение трубы постоянное и вязкое трение мало, то импульс газа, находящегося в трубе, изменяется за счет сил давления окружающего газа на торцы трубы. Запишем изменение импульса газа, находящегося в трубе, в проекции на ось x, направленную по движению газа:

$$dp_x = (P_1 S - P_2 S)\, dt.$$

С другой стороны, так как скорость газа в любом сечении остается постоянной, то изменение импульса газа, находящегося в трубе, можно рассчитать как разность импульсов порции газа, вышедшей из трубы за малое время dt и импульса порции газа, вошедшей в трубу за это время

$$dp_x = \mu\,(v_2 - v_1)\, dt$$

Приравнивая выражения для dp_x и используя выражение для μ, получим:

$$\rho_2 = \frac{{\rho_1}^2 {v_1}^2}{\rho_1 {v_1}^2 - \Delta P}; \left(\rho_2 = \frac{{\rho_1}^2 {v_1}^2}{\rho_1 {v_1}^2 + P_1 - P_2}\right)$$

$$v_2 = v_1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 v_1}; \left(v_2 = v_1 - \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 v_1}\right)$$

2 ?? отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;

Из уравнение состояния идеального газа, записанного для порций газа на входе в трубу и на выходе из нее имеем:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 \rho_1}{P_1 \rho_2} = \frac{P_2 v_2}{P_1 v_1},$$

откуда

Ответ:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1 - \frac{\Delta P}{\rho_1 {v_1}^2}\right); \left(\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\left(1 - \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 {v_1}^2}\right)\right)$$

3 ?? тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Запишем закон сохранения энергии для газа находящегося в трубе, рассмотрев малый промежуток времени dt. За это время над газом совершают работу внешние силы давления, изменяются его кинетическая и внутренняя энергии и часть энергии выделяется в окружающую среду

$$P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = \mu dt \left(\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2} + \frac{C_V}{M}(T_2 - T_1)\right) + N dt,$$

где M - молярная масса газа.

Таким образом

$$N = \rho_1 S v_1 \left(\frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2} + \frac{C_P}{M}(T_1 - T_2)\right)$$

Подставив полученные ранее соотношения, окончательно получим

Ответ:

$$N = \rho_1 S v_1 \left(\frac{{v_1}^2}{2}\left(1-\left(1-\frac{\Delta P}{\rho_1 {v_1}^2}\right)^2\right) + \frac{4P_1}{\rho_1}\left(1-\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)\left(1-\frac{\Delta P}{\rho_1 {v_1}^2}\right)\right)\right)$$

$$\left(N = \rho_1 S v_1 \left(\frac{{v_1}^2}{2}\left(1-\left(1-\frac{P_2-P_1}{\rho_1 {v_1}^2}\right)^2\right)+\frac{4P_1}{\rho_1}\left(1-\frac{P_2}{P_1}\left(1-\frac{P_2-P_1}{\rho_1 {v_1}^2}\right)\right)\right)\right)$$

Разбалловка

T **Условие**

S **Решение**

M **Разбалловка**

1 ?? плотность ρ_2 и скорость v_2 газа на выходе из трубы;

2 ?? отношение температур газа T_2/T_1 на выходе и на входе в трубу соответственно;

3 ?? тепловую мощность N, выделяемую трубой в окружающую среду.

Решение

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;

При подключении к клеммам омметра резистора его сопротивление вычисляется омметром по величине протекающего тока по формуле

$$R_{изм} = \frac{\mathcal{E}}{I} - r.$$

При подключении к клеммам любых других электрических элементов вычисления производятся по этой же формуле (омметр не может определить что именно к нему подключено и предполагает, что подключен резистор).

При подключении диода в прямом направлении величина тока через него

$$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r}.$$

С другой стороны можем выразить этот же ток из показаний омметра

$$I_D = \frac{\mathcal{E}}{r + R_D},$$

откуда получим

$$\frac{\mathcal{E} - U_0}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_D}$$

Для диода, соединенного с резистором, получим аналогичное соотношение

$$\frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}.$$

Поделив два предыдущих соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{r}{r + R} = \frac{r + R_D}{r + R_1},$$

откуда

$$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R} = 30 \text{кОм};$$

$$U_0 = \mathcal{E}\frac{R_D}{r + R_D} = \mathcal{E}\frac{R_1 - R_D - R}{R_1 - R_D} = \frac{\mathcal{E}}{6}$$

Рассмотрим подключение батарейки. Отрицательное значение сопротивления на экране омметра может получаться по двум причинам:

а) батарейка включена в том же направлении, что источник (минус батарейки подключен к плюсу источника), при этом ток в цепи превосходит ток короткого замыкания, и результат вычисления омметром по заложенной в него формуле становится отрицательным; \newline
б) батарейка включена навстречу внутреннему источнику омметра, при этом напряжение батарейки больше напряжения источника и ток течет в противоположном "правильному" направлению при измерении обычного сопротивления. Эти случаи придется рассматривать отдельно

Случай «а»:

$$I_Б = \frac{\mathcal{E} + U_Б}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_Б},$$

откуда

$$\mathcal{E} = -U_Б\frac{r + R_Б}{R_Б} = 9 \text{В},$$

тогда

$\mathcal{E}$

$$U_0 = \frac{-}{6} = 1,5\text{В}$$

При подключении батарейки с изменением полярности

$$\frac{\mathcal{E} - U_\text{Б}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{Б}_1}},$$

откуда

$$R_{\text{Б}_1} = r\frac{U_\text{Б}}{\mathcal{E} - U_\text{Б}} = 15\text{кОм}$$

Случай «б»:

$$I_\text{Б} = \frac{\mathcal{E} - U_\text{Б}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_\text{Б}},$$

откуда

$$\mathcal{E} = U_\text{Б}\frac{r + R_\text{Б}}{R_\text{Б}} = -9\text{В}.$$

Следовательно, случай «б» не реализуется и остается единственный вариант подключения, рассмотренный в случае «а».

Ответ:

$$\mathcal{E} = -U_\text{Б}\frac{r + R_\text{Б}}{R_\text{Б}} = 9\text{В},$$

2 ?? величину внутреннего сопротивления r омметра;

Ответ:

$$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R} = 30\text{кОм};$$

3 ?? напряжение U_0, при котором открывается диод;

Ответ:

$$U_0 = \frac{\mathcal{E}}{6} = 1,5\text{В}$$

4 ?? показания $R_{\text{Б}1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Ответ:

$$R_{\text{Б}_1} = r\frac{U_\text{Б}}{\mathcal{E} - U_\text{Б}} = 15\text{кОм}$$

1 ?? величину напряжения $\mathcal{E}$ внутреннего источника омметра;

Записана связь между показаниями омметра и текущим через него током $$R_{\text{изм}} = \frac{\mathcal{E}}{I} - r$$ или $$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{изм}}}$$ или эквивалент	1.00
Выражение для силы тока через диод $$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r}$$ или эквивалент	1.00
Выражение для силы тока через диод, с подключенным резистором $$I_D = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R}$$ или эквивалент	1.00
Найдено r (формула) $$r = \frac{RR_D}{R_1 - R_D - R}$$	0.50
Найдено численное значение $r = 30\text{кОм}$ Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения r	-0.20
Существование случая «а» $(I > I_{\text{кз}})$	0.50
Выражение для силы тока через батарейку в случае «а» $$I_{\text{Б}} = \frac{\mathcal{E} + U_{\text{Б}}}{r}$$	1.00
Найдено $\mathcal{E}$ в случае «а» (формула) $$\mathcal{E} = -U_{\text{Б}}\frac{r + R_{\text{Б}}}{R_{\text{Б}}}$$	0.50
Найдено численное значение $\mathcal{E} = 9\text{В}$ в случае «а» Комментарий: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения $\mathcal{E}$ в случае «а»	-0.20
Найдено $R_{\text{Б}_1}$ (формула) $U_{\text{Б}}$	0.50

$$R_{Б_1} = r\frac{U_Б}{\mathcal{E} - U_Б}$$	
Найдено численное значение $R_{Б_1} = 15 кОм$ **Комментарий**: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения $R_{Б_1}$	-0.20
Указано существование случая «б»	0.50
Выражение для силы тока через батарейку в случае «б» $$I_Б = \frac{\mathcal{E} - U_Б}{r}$$	1.00
Найдено $\mathcal{E}$ в случае «б» (формула) $$\mathcal{E} = U_Б\frac{r + R_Б}{R_Б}$$	0.50
Найдено численное значение $\mathcal{E} = -9 В$ в случае «б» **Комментарий**: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся **Комментарий**: эквивалентным утверждением является противоречие неравенства $\lvert R_{Б_1}\rvert > r$ и условий задачи.	0.50
Отсутствие единиц измерения $\mathcal{E}$ в случае «б»	-0.20
Сделан вывод о том, что случай "б" не реализуем	1.00
Найдено U_0 (формула) $$U_0 = \frac{\mathcal{E}}{6}$$	0.50
Найдено численное значение $U_0 = 1,5 В$ **Комментарий**: если значение получено численными или графическими методами, минуя получение конечной формулы, баллы за формулу ставятся	0.50
Отсутствие единиц измерения U_0	-0.20

2 ?? величину внутреннего сопротивления r омметра;

3 ?? напряжение U_0, при котором открывается диод;

4 ?? показания $R_{Б1}$ омметра при подключении к нему той же батарейки, но с изменением полярности.

Решение

I Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x;0)$ и $(0;y)$. Считайте $x,y \ll R$.

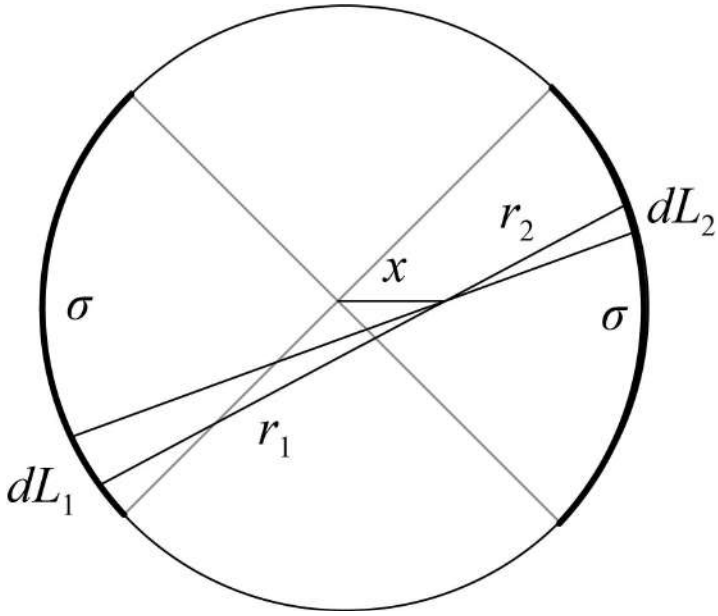
Поле цилиндра можно представить как сумму полей бесконечно длинных тонких нитей (узких полосок), заряженных с постоянной линейной плотностью заряда λ. Найдём поле такой нити на расстоянии r от нее, воспользовавшись симметрией поля и теоремой Гаусса

$$\Phi = 2\pi r L E_r = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

откуда следует:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}.$$

Найдём напряжённость поля в точке с координатами $(x;0)$. Рассмотрим два выделенных на рисунке небольших участка цилиндра.



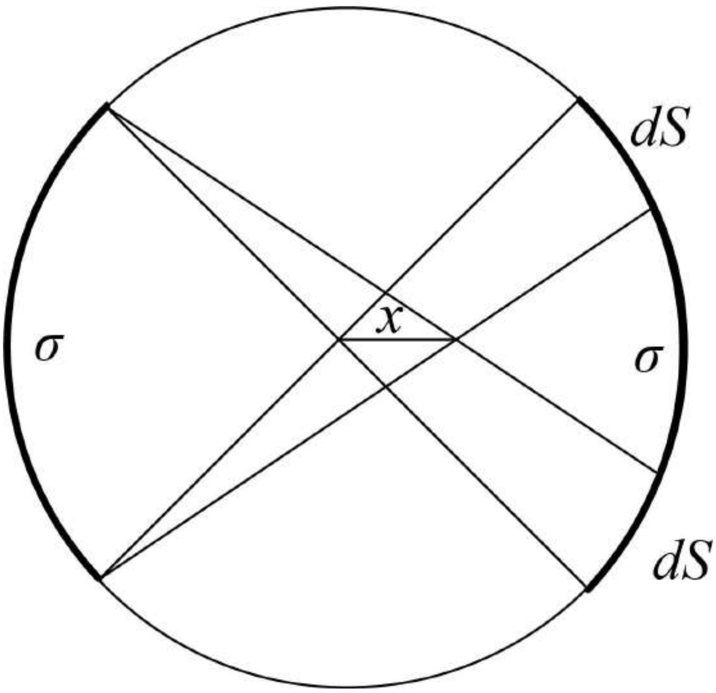
Они создают противоположно направленные поля как от двух нитей с линейными плотностями заряда σdL_1 и σdL_2 соответственно. Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{dL_1}{r_1} = \frac{dL_2}{r_2},$$

поэтому

$$dE_1 = \frac{\sigma dL_1}{2\pi r_1 \varepsilon_0} = \frac{\sigma dL_2}{2\pi r_2 \varepsilon_0} = dE_2,$$

и эти два поля друг друга компенсируют. Исходя из этого ясно, что поле цилиндра в рассматриваемой точке эквивалентно суммарному полю двух выделенных полосок шириной dS каждая, поля которых не компенсируются (см.рис.)



При этом

$$dS = x\sqrt{2},$$

и каждая полоска создаёт поле, равное

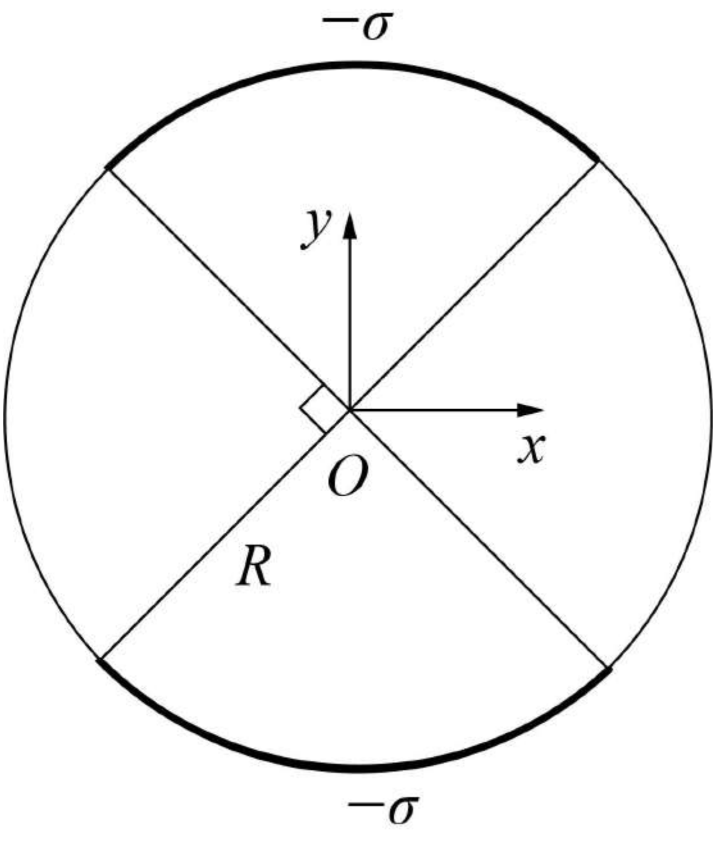
$$E_0 = \frac{\sigma x\sqrt{2}}{2\pi R\varepsilon_0}$$

Поля этих полосок компенсируют друг друга в направлении оси y, поэтому $E_y = 0$, а проекция поля на ось x равна

$$E_x = 2\cdot\frac{-E_0}{\sqrt{2}} = -\frac{\sigma x}{\pi R\varepsilon_0}.$$

Таким образом, результирующее поле направлено к оси цилиндра.

Для нахождения поля в точке $(0, y)$ представим исходный цилиндр как суперпозицию полностью заряженного цилиндра с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и двух четвертинок с поверхностной плотностью $-\sigma$ (см рис.)



Поле E_1, создаваемое двумя отрицательно заряженными четвертинками, аналогично, найденному в первом случае, поэтому можем воспользоваться готовым результатом:

$$E_{1_y} = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_{1_x} = 0$$

Поле, создаваемое в точке $(y, 0)$, равномерно заряженным цилиндром из соображений симметрии и теоремы Гаусса равно нулю. Тогда по принципу суперпозиции проекции результирующего поля E' в искомой точке равны:

$$E_y{}' = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_x{}' = 0.$$

Поле E' направлено от оси цилиндра.

Ответ:

$$E_y{}' = \frac{\sigma y}{\pi R \varepsilon_0}; E_x{}' = 0.$$

Разбалловка

T [Условие]
S [Решение]
M [Разбалловка]

1 ?? Найдите векторы напряженности электрического поля цилиндра в точках, близких к его центру и имеющих координаты $(x;0)$ и $(0;y)$. Считайте $x, y \ll R$.

За каждую арифметическую ошибку или потерю безразмерного коэффициента, баллы снимаются только в том пункте, в котором допущена ошибка	None
Есть формула для поля бесконечной заряженной нити $$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$$	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент	-0.50
Поле на оси цилиндра равно 0	1.00
M1 Указано, что поля от большей части заряженных поверхностей для точки $(x,0)$ компенсируются	1.00
M1 Утверждение из предыдущего пункта обосновано	1.00
M1 Найдены размеры нескомпенсированных поверхностей	1.00
M2 Выписан верный интеграл для напряженности в точке $(x,0)$	1.00
M2 Верно вычислен интеграл	2.00
M3 Верно используется наложение заряженных цилиндров для нахождения поля в точке $(x,0)$ через поле в $(0,y)$	3.00
Определено направление поля в точке $(x,0)$	1.00
Получена проекция E_x: $$E_x = -\frac{\sigma x}{\pi R\varepsilon_0}$$ Комментарий: пункт не оценивается при неверном методе	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент или потерян знак	-0.50
МЕТОД 1: Указано, что поля от большей части заряженных поверхностей для точки $(0,y)$ компенсируются	1.00
МЕТОД 1: Утверждение из предыдущего пункта обосновано	1.00
МЕТОД 1: Найдены размеры нескомпенсированных поверхностей	1.00
МЕТОД 2: Выписан верный интеграл для напряженности в точке $(0,y)$	1.00
МЕТОД 2: Верно вычислен интеграл	2.00
МЕТОД 3: Верно используется наложение заряженных цилиндров для нахождения поля в точке $(0,y)$ через поле в $(x,0)$	3.00
Определено направление поля в точке $(0,y)$	1.00
Получена проекция E_y: $$E_y = \frac{\sigma y}{\pi R\varepsilon_0}$$ Комментарий: пункт не оценивается при неверном методе	1.00
В предыдущей формуле неверный численный коэффициент или потерян знак	-0.50

2020 -- We are what they grow beyond.

Решение

I Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? При каком значении $x = x_{кр}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

Зонды столкнутся, если одновременно окажутся в точке пересечения траекторий. Если двигатели не включались, то зонды движутся равномерно, поэтому:

$$\frac{x_{кр}}{v} = 3\frac{\sqrt{L^2 - {x_{кр}}^2}}{v},$$

откуда

Ответ:

$$x_{кр} = \frac{3L}{\sqrt{10}}$$

2 ?? Найдите минимальное значение силы тяги $F_{мин}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{кр}$.

Так как $x = x_{кр}$, то вектор относительной скорости второго зонда относительно первого $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ в момент включения двигателей направлен строго на первый зонд.
Перейдём в систему отсчёта, связанную с первым зондом. В ней на второй зонд действуют сила тяги двигателя и сила инерции, равная

$$\vec{F}_и = m_2\frac{-\vec{F}}{m_1}.$$

Из этого следует, что второй зонд движется прямолинейно.

Найдём модуль скорости второго зонда в момент, когда расстояние между зондами равно S. Запишем закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{m_2 v_{отн}^2}{2} - \frac{m_2 v_{отн_0}^2}{2} = A_F + A_{F_и} = \left(-\vec{F} + \vec{F}_и\right)\Delta\vec{r}_{отн},$$

откуда:

$$\frac{m_2 v_{отн}^2}{2} - \frac{m_2 v_{отн_0}^2}{2} = -F\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(L - S)\,.$$

Минимально возможная сила достигается, если при расстоянии $S = 0$ между зондами их относительная скорость равна нулю, поэтому:

$$F_{min} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{v_{отн_0}^2}{2L} = \frac{4mv^2}{9L}.$$

Ответ:

$$F_{min} = \frac{4mv^2}{9L}$$

3 ?? Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{мин} + dF$ ($dF \ll F_{мин}$), а $x = x_{кр}$. Найдите вектор конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

Поскольку по условию $dF \ll F_{min}$, будем считать, что $F = F_{min}$. Подставляя в закон изменения кинетической энергии (1) выражение для F_{min}, получим:

$$\frac{m_2 v_{отн}^2}{2} = FS\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Из этого следует, что в момент, когда расстояние между зондами $S = 2L$

$$|v_{\text{отн}}| = \sqrt{2}|v_{\text{отн}_0}|.$$

Направление относительной скорости меняется на противоположное, поэтому

$$\vec{v}_{\text{отн}} = -\sqrt{2}\vec{v}_{\text{отн}_0}.$$

Вернёмся в исходную систему отсчёта.

Равнодействующая сила, действующая на систему из двух зондов, равняется нулю, поэтому центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2}{5}.$$

Отсюда для скорости первого Зонда относительно центра масс $\vec{v}_{1_{\text{отн}_C}}$ получаем:

$$\vec{v}_{1_{\text{отн}_C}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \frac{4}{5}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{4}{5}\vec{v}_{\text{отн}}.$$

где $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Получим окончательное выражение для вектора конечной скорости второго зонда

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_C + \vec{v}_{1_{\text{отн}_C}} = \vec{v}_C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\vec{v}_{\text{отн}_0} = \frac{1}{5}\vec{v}_1\left(1 - 4\sqrt{2}\right) + \frac{4}{5}\vec{v}_2\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Ответ:

$$\vec{v}_{\text{к}} = \frac{1}{5}\vec{v}_1\left(1 - 4\sqrt{2}\right) + \frac{4}{5}\vec{v}_2\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

4 ?? Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$). Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.

Вновь перейдём в систему отсчёта, связанную с первым зондом. Учтём, что при произвольном значении x относительное движение второго зонда перестаёт быть прямолинейным, так как $\vec{v}_{\text{отн}_0}$ перестаёт быть направленной на первый зонд, следовательно, относительное ускорение становится неколлинеарным начальной относительной скорости.

Запишем закон изменения кинетической энергии для малого относительного перемещения зондов:

$$dE_k = \left(-\vec{F} + \vec{F}_{\text{и}}\right) d\vec{r}_{\text{отн}} = -\vec{F}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) d\vec{r}_{\text{отн}} = -F\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) dS,$$

поскольку вектор силы тяги всегда направлен против направления на второй зонд. Полученное выражение оказывается применимым при любых значениях x и не зависит от формы траектории. Поэтому, используя результат, полученный при решении второго вопроса для значения $S = 2L$

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_{\text{отн}_0}^2 + \frac{2FL(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$

Ответ:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$

Разбалловка

T Условие

S Решение

M Разбалловка

1 ?? При каком значении $x = x_{\text{кр}}$ произошло бы столкновение зондов, если бы двигатели на них не включались?

Записано условие столкновения.	1.00
Получен ответ на первый вопрос $$x_{\text{кр}} = \frac{Lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{3L}{\sqrt{10}} \approx 0,95L.$$	1.00

2 ?? Найдите минимальное значение силы тяги $F_{\text{мин}}$ при котором зонды не столкнутся, если $x = x_{\text{кр}}$.

Обосновано, что при $x = x_{\text{кр}}$ силы тяги не меняют направления.	1.00
Верно описана динамика системы.	0.50
Получен правильный ответ $$F_{min} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v^2_{\text{отн}_0}}{2L} = \frac{4mv^2}{9L}.$$	0.50

3 ?? Пусть величины сил тяги двигателей равны $F = F_{\text{мин}} + dF$ ($dF \ll F_{\text{мин}}$), а $x = x_{\text{кр}}$. Найдите вектор конечной скорости первого зонда в виде $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

Указано, что в процессе движения вектор относительной скорости меняет направление.	0.50
Верно описана динамика системы.	0.50
$$v_{\text{отн}} = \sqrt{2}v_{\text{отн}_0} = \frac{\sqrt{20}v}{3} = \approx 1,49v,$$ либо $$\tau = \frac{3\sqrt{10}\left(1+\sqrt{2}\right)}{5}\frac{L}{v},$$ где τ - время работы двигателей.	0.50
Указано, что векторная сумма импульсов зондов постоянна, либо $$\Delta p_x = -\frac{3F\tau}{\sqrt{10}}; \Delta p_y = \frac{F\tau}{\sqrt{10}},$$ где оси x и y направлены вдоль $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно.	0.50
$$\alpha = \frac{1-4\sqrt{2}}{5} \approx -0,93v.$$	1.00
$$\beta = \frac{4(1+\sqrt{2})}{5} \approx 1,93v.$$	1.00

4 ?? Пусть сила тяги двигателей равна F, а $x = x_1$ ($x_1 > x_{\text{кр}}$). Найдите модуль конечной скорости первого зонда относительно второго.

Верное выражение для суммарной работы силы тяги и силы инерции. $$A = A_{\vec{F}} + A_{\vec{F}_\text{и}} = 5FL,$$ либо для суммарной работы сил тяги $$A = FL$$	1.00
Выражение для работы получено с необходимыми обоснованиями.	2.00
$$v_\text{отн} = \sqrt{v^2_{\text{отн}_0} + \frac{2FL(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{10v^2}{9} + \frac{5FL}{2m}}.$$	1.00
Примечание : любые ответы, полученные из некорректных рассуждений, оцениваются в ноль баллов.	None