# Материалы для проведения заключительного этапа

# XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

## 2020–2021 учебный год

## Первый день

## Тюмень,
## 17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

# 11 класс

11.1. При некоторых натуральных $n > m$ число $n$ оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m$, а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m+1$. При каком наибольшем $m$ это могло произойти (хоть при каком-то $n > m$)?

(*А. Кузнецов*)

11.2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен степени $n$ с неотрицательными коэффициентами такой, что функция $y = P(x)$ — нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на графике $G$: $y = P(x)$ выполняются условия: касательная к графику $G$ в точке $A_1$ проходит через точку $A_2$, касательная в точке $A_2$ проходит через точку $A_3$, …, касательная в точке $A_n$ — через точку $A_1$? (*Н. Агаханов*)

11.3. В языке три буквы — Ш, У и Я. *Словом* называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых — гласные (то есть У или Я), а остальные 60 — буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причём различные? (*Ф. Петров*)

11.4. В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Прямая, проходящая через точку $B$ параллельно $AC$ пересекает лучи $AA_1$ и $CC_1$ в точках $A_2$ и $C_2$ соответственно. Точка $O_a$ — центр описанной окружности треугольника $AC_1C_2$, точка $O_c$ — центр описанной окружности треугольника $CA_1A_2$. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$. (*А. Кузнецов*)