Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень, 17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить. (*М. Дидин, А. Кузнецов*)

10.6. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет ровно n^3 различных вещественных корней. Докажите, что эти n^3 корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими. (*А. Кузнецов*)

10.7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные a, b и c такие, что $n = ab + bc + ca$. (*А. Храбров*)

10.8. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Прямая CD пересекает лучи AB и AE в точках X и Y соответственно. Отрезки EX и BY пересекаются в точке P и вторично пересекают окружность ω в точках Q и R. Точка A' симметрична точке A относительно прямой CD. Окружность γ, описанная около треугольника PQR, пересекает окружность, описанную около треугольника $A'XY$, в двух точках. Докажите, что их можно назвать M и N так, чтобы прямые CM и DN пересекались на окружности γ. (*М. Дидин, А. Кузнецов*)