Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD. Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ.

Из касания окружности (AOD) и прямой AE имеем $\angle EAO = \angle ADO$, а из параллельности $BC \parallel AD$ имеем $\angle EBO = \angle ADO$ (см. рис. 2). Таким образом, $\angle EAO = \angle EBO$, следовательно, четырехугольник $ABEO$ вписанный. Аналогично $CFOD$ вписанный.

Отсюда, с использованием параллельности $AB \parallel CD$, получаем: $\angle OFE = \angle ODC = \angle OBA = \angle OEA$. Но из равенства $\angle OFE = \angle OEA$ следует касание окружности (EOF) и прямой AE. Аналогично доказываем касание окружности (EOF) и прямой DF.

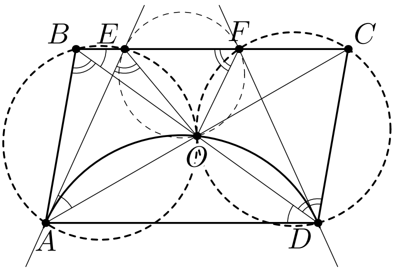

Рис. 2

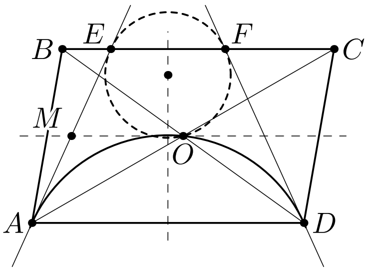

Рис. 3

Второе решение. Четырёхугольник $AEFD$ симметричен относительно серединного перпендикуляра к AD, поэтому линия центров окружностей (AOD) и (EOF) — это серединный перпендикуляр к AD (см. рис. 3). Тогда радикальная ось m этих окружностей параллельна AD и проходит через O. Так как O равноудалена от AD и BC, то m — средняя линия трапеции $AEFD$, в частности, m проходит через середину M отрезка AE.

Значит, степени M относительно (AOD) и (EOF) равны, т.е. $MA^2 = ME \cdot ME'$, где E' — вторая точка пересечения AE и (EOF). Так как $MA = ME$, получаем $E' = E$, откуда следует касание окружности (EOF) и прямой AE. Аналогично доказываем касание окружности (EOF) и прямой DF.

10.2. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что
$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$
при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}, x_{21} = x_1, x_{22} = x_2$. (*П. Козлов*)

Ответ. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{20} = 2$.

Решение. Из условия следует, что все x_i больше 1, а также x_{i+2}^2 делится на x_i при $i = 1, 2, \ldots, 20$ (здесь и далее $x_{j+20} = x_j = x_{j-20}$ для $j = 1, \ldots, 20$).

Пусть x_k — наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_{20}$, а p — простой делитель числа x_{k-5}. Поскольку x_{k-3}^2 делится на x_{k-5}, а x_{k-1}^2 делится на x_{k-3}, то x_{k-3} и x_{k-1} делятся на p. А тогда и $\text{НОК}(x_{k-5}, x_{k-4})$, и $\text{НОК}(x_{k-4}, x_{k-3})$ делятся на p, поэтому x_{k-2}^2 делится на p. Таким образом, числа $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}$ все делятся на p, поэтому их попарные НОДы не меньше p. Следовательно,
$$x_k^2 = \text{НОК}(x_{k-1}, x_{k-2}) + \text{НОК}(x_{k-2}, x_{k-3}) =$$
$$= \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{\text{НОД}(x_{k-1}, x_{k-2})} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-3})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{p} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{p} \leqslant \frac{2x_k^2}{p}.$$
Поскольку $p \geqslant 2$, такая цепочка неравенств может выполняться только в случае, когда $p = 2$ и все неравенства обращаются в равенства. В частности, $x_{k-2} = x_{k-1} = x_k$ и $\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-1}) = p = 2$. Значит, $x_k = 2$, а тогда и все x_i равны 2 (поскольку x_k наибольшее из них, и все эти числа больше 1).

Остается заметить, что набор $x_1 = x_2 = \ldots = x_{20} = 2$ удовлетворяет условию.

10.3. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране? (*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. Конструкция возможна только при $k < N$, и тогда наибольшее количество ребер равно $C_N^2 - C_k^2$.

Первое решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — это города, ребра — авиалинии, причем ребра, соответствующие авиалиниям i-ой компании, покрашены в i-й цвет.

Пример. Пусть в графе вершины $v_1, \ldots, v_k$ не смежны друг с другом, и из вершины v_i ведут ребра цвета i во все вершины с номерами, большими k. Все ребра между вершинами с номерами, большими k, присутствуют и покрашены произвольным образом. Очевидно, что при удалении ребер цвета i из вершины v_i нельзя добраться до остальных вершин графа, а изначальный граф связен.

Оценка. Докажем индукцией по k, что в графе отсутствует хотя бы C_k^2 ребер; из этого следует, что $k < N$, ибо иначе ребер бы не было, и граф не был бы связным. База при $k = 1$ очевидна.

Переход: $(k-1(\mapsto k$. Рассмотрим все компоненты связности k-го цвета. Их хотя бы k, иначе можно, добавляя цвета, каждый раз уменьшать количество компонент хотя бы на 1 (если при добавлении цвета количество компонент не уменьшилось, то при удалении из исходного графа ребер этого цвета граф остается связным). Тогда $(k-1)$-й цвет уже сделает граф связным.

Стянем каждую компоненту k-го цвета в вершину (то есть сопоставим каждой компоненте вершину нового графа, проведя ребра между вершинами тогда и только тогда, когда какие-то вершины соответствующих компонент были связаны ребром; если между двумя компонентами были ребра нескольких цветов, оставим один). Полученный граф удовлетворяет индукционному предположению, поэтому в нем отсутствует хотя бы C_{k-1}^2 ребер, соответствующих хотя бы тому же количеству в исходном графе.

С другой стороны, если выкинуть все ребра k-го цвета, хотя бы одна из его компонент, пусть C, должна разбиться на две. Это значит, что в любую другую компоненту D нет ребер хотя бы от одной из частей C. Докажем, что тогда в графе отсутствуют ещё хотя бы $k-1$ рёбер, не учтённых ранее. Если от компоненты D нет рёбер в обе части C, то это означает отсутствие хотя бы двух рёбер, а до этого мы учли только одно. Если от компоненты D есть ребро к одной из частей C, то в графе из стянутых вершин-компонент соответствующие компоненты были соединены, но на самом деле одного ребра в исходном графе нет. Итак, за счёт каждой компоненты, отличной от C, мы должны учесть отсутствие ещё хотя бы одного ребра. Значит, ещё минимум $k-1$ ребро отсутствует, и всего отсутствующих ребер хотя бы $C_{k-1}^2+(k-1)=C_k^2$, что и требовалось.

Второе решение. Приведём другой способ доказать оценку; мы используем терминологию, введённую в начале первого решения.

Сначала докажем, что для каждой пары компаний (i,j) найдутся две вершины A, B, любой путь между которыми содержит ребра обеих компаний i и j. Пусть при удалении компании i вершины распадаются на два непустых множества U_i и V_i, между которыми нет ребер, а при удалении компании j — на множества U_j и V_j. Если множества $U_i\cap U_j$ и $V_i\cap V_j$ оба непустые, то можно взять $A\in U_i\cap U_j$ и $B\in V_i\cap V_j$. Иначе, множества $U_i\cap V_j$ и $V_i\cap U_j$ оба непустые, и можно взять $A\in U_i\cap V_j$ и $B\in V_i\cap U_j$. Ясно, что A и B подходят и что между ними нет ребра.

Для каждой пары компаний (i,j) выберем A и B так, что расстояние между ними (то есть длина пути по ребрам исходного графа) минимально возможное. Если мы докажем, что разным парам компаний соответствуют разные пары (A,B), то мы получим, что отсутствующих ребер не меньше, чем пар компаний, что и даст требуемую оценку.

Предположим, что пара (A,B) соответствует двум разным парам компаний — $(1,2)$ и еще одной (без ограничения общности, либо $(1,3)$, либо $(3,4)$). Пусть $A=A_0, A_1,\ldots,A_{n-1},A_n=B$ — один из кратчайших путей между A и B, $n\geqslant 2$. Если ребро A_0A_1 принадлежит не компаниям 1 или 2, то любой путь между A_1 и A_n содержит ребра компаний 1 и 2, что противоречит минимальности расстояния для пары (A,B). Аналогично, ребро $A_{n-1}A_n$ принадлежит одной из компаний 1 или 2.

Значит, пара (A,B) не может соответствовать паре компаний $(3,4)$. Таким образом, пара (A,B) соответствует паре компаний $(1,3)$, и ребра A_0A_1 и $A_{n-1}A_n$ оба принадлежат компании 1. Тогда любой путь между A_0 и A_{n-1}, любой путь между A_{n-1} и A_1 и любой путь между A_1 и A_n содержат ребра обеих компаний 2 и 3. Из минимальности расстояния для пары (A,B) следует, что между A_0 и A_{n-1}, между A_{n-1} и A_1, а также между A_1 и A_n существуют пути, не содержащие ребер компании 1. Соединяя эти пути, получаем путь (возможно, с повторяющимися вершинами) от A_0 до A_n, не содержащий ребер компании 1. Противоречие.

10.4. Дано натуральное число $n \geqslant 4$ и $2n+4$ карточки, пронумерованные числами $1, 2, \ldots, 2n+4$. На карточке с номером m написано вещественное число a_m, причем $[a_m] = m$. Докажите, что можно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на первых двух карточках отличалась от суммы чисел на двух других карточках менее чем на $\dfrac{1}{n-\sqrt{n/2}}$. *(А. Кузнецов)*

Решение. Обозначим $c = \dfrac{1}{n-\sqrt{n/2}}$. Назовем пару карточек неудачной, если написанные на них числа отличаются менее чем на c. Карточки в такой паре имеют последовательные номера, потому что в противном случае числа на них отличаются более чем на 1, а $c \leqslant \frac{1}{2}$ при $n \geqslant 4$. Если карточка i состоит в двух неудачных парах, то эти пары — $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$. В таком случае $1 < a_{i+1} - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i + a_i - a_{i-1} \leqslant 2c \leqslant 1$, противоречие. Следовательно, каждая карточка состоит максимум в одной неудачной паре. Пусть нашлись две неудачные пары: $(i, i+1)$ и $(j, j+1)$. В силу сказанного выше, все эти 4 карточки различны. С другой стороны, $|a_i + a_{j+1} - a_{i+1} - a_j| = |(a_{j+1} - a_j) - (a_{i+1} - a_i)| \leqslant \max(a_{i+1} - a_i, a_{j+1} - a_j) < c$, и задача решена. Здесь мы воспользовались тем, что $0 < a_{j+1} - a_j < c$ и $0 < a_{i+1} - a_i < c$. Пусть неудачных пар карточек не более одной. Если неудачная пара есть, пусть эта пара $(T, T+1)$. Если таких пар нет, положим $T = 1$.

Обозначим через S_m множество пар карточек $x < y$ с суммой номеров $x + y = m$. Заметим, что $|S_{2n+5}| = n + 2$, $|S_{2n+5-2s}| = |S_{2n+5-2s+1}| = n + 2 - s$ и $|S_{2n+5+2s}| =$

$= |S_{2n+5+2s-1}| = n+2-s$ при $1 \leqslant s \leqslant n$. Положим $S = S_{2n+5+2k} \cup S_{2n+5+2k-1} \cup \ldots \cup S_{2n+5-2k}$, число k мы подберем позже. Тогда $|S| = n+2+4(n+1+n+n-1+\ldots+n-k+2) = n+2+2k(2n-k+3)$.

Пусть в S две пары вида (T,p) и $(T+1,p)$, здесь p может быть как больше T, так и меньше. Тогда $T+p \geqslant 2n+5-2k$ и $T+p+1 \leqslant 2n+5+2k$. Значит, $2n+5-2k-T \leqslant p \leqslant 2n+4+2k-T$, то есть p может принимать не более $4k$ значений. Для каждого из них удалим из S карточку вида (T,p). В результате мы получим множество S', удалив из S не более $4k$ пар карточек. Значит, $|S'| \geqslant n+2+2k(2n-k+3)-4k = n+2+2k(2n-k+1)$.

Заметим, что $a_i+a_j \in [i+j, i+j+2)$. Поскольку в каждой паре из S' сумма номеров карточек принимает значения от $2n+5-2k$ до $2n+5+2k$, то сумма чисел на карточках из таких пар лежит в промежутке $[2n+5-2k, 2n+7+2k)$, длина которого равна $4k+2$. Тогда суммы чисел в каких-то двух парах карточек $(x,y),(z,t) \in S'$ отличаются не более чем на

$$\frac{4k+2}{|S'|-1} = \frac{4k+2}{2k(2n-k+1)+n+1}\,.$$

Остается доказать, что при некотором k число $\frac{2k(2n-k+1)+n+1}{4k+2}$ больше $n-\sqrt{n/2}$. Преобразуем числитель: $2k(2n-k+1)+n+1 = (2k+1)(2n-k+\frac{3}{2})-n-\frac{1}{2}$. Значит,

$$\frac{2k(2n-k+2)+n+1}{4k+2} = n+\frac{3}{4}-\frac{k}{2}-\frac{n}{4k+2}-\frac{1}{8k+4}\,.$$

Наконец, выберем число k как целое число из промежутка $\left[\sqrt{n/2}-\frac{1}{2}\,;\sqrt{n/2}+\frac{1}{2}\right]$. Тогда $4k+2 \geqslant 2\sqrt{2n}$, поэтому

$$n+\frac{3}{4}-\frac{k}{2}-\frac{n}{4k+2}-\frac{1}{8k+4} \geqslant$$
$$\geqslant n+\frac{3}{4}-\sqrt{n/2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4\sqrt{2n}} > n-\sqrt{n/2}$$

при $n \geqslant 4$.

Итак, мы получили, что суммы вида a_x+a_y и a_z+a_t для некоторых $(x,y),(z,t) \in S'$ отличаются менее чем на c. Остается проверить, что эти 4 карточки разные. Предположим противное, по построению S' имеем $x \neq y$ и $z \neq t$. Пусть, без ограничения общности, $x = z$. Тогда $|a_y - a_t| < c$, то есть карточки y и t образуют неудачную пару. Значит, это карточки T и $T + 1$. Следовательно, $(x, T) \in S$ и $(x, T + 1) \in S'$, противоречие.

ВсОШ-2021 по математике. 10 класс, критерии

апрель 2021

Задача 10.1

[1 б.] Доказано равенство углов $\angle OBE$ и $\angle OAE$ (или аналогичное).

Задача 10.2

Частичные продвижения (не суммируются друг с другом):
[0 б.] Только ответ.
[1 б.] Доказано, что числа набора через одно имеют одни и те же простые делители.
[2 б.] Доказано, что все числа набора чётны.
[2 б.] Доказано, что у всех чисел набора один и тот же набор простых делителей.
[4 б.] Доказано, что все числа набора суть степени двойки.

Задача 10.3

[1 б.] Пример
Суммируется с баллами за оценку.
[−0 б.] За отсутствие проверки примера баллы не снижаются.

[6 б.] Оценка
Частичные продвижения (не суммируются друг с другом):
[1 б.] В индукционной оценке верно разобран случай, когда из висячей вершины остовного дерева выходят рёбра хотя бы двух цветов.
[1 б.] Доказано, что компонент связности на рёбрах одного цвета хотя бы k.

Во в целом верном решении снижаются баллы за различные недочеты:
[−1 б.] Не доказано, что $k < N$; проблемы с базой индукции; и другие мелкие неточности.

Если в индукционном переходе допущена логическая ошибка — добавляется вершина или не проверяется предположение (которое не верно) — то баллы за индуктивное рассуждение не начисляются.

В отрыве от верного решения не оцениваются следующие продвижения:
[0 б.] Доказано, что $k < N$.
[0 б.] Доказано, что в остовном дереве все цвета присутствуют.
[0 б.] Попытка оценки количества непроведённых рёбер, при которой не проверяется, что оцениваемые рёбра уникальны (т. е. рёбра могут считаться по несколько раз).
[0 б.] Идея сопоставлять каждой паре цветов непроведённое ребро.
[0 б.] Разбор отдельных случаев, в частности, базы индукции ($k = 1$, $k = 2$, $n = k + 1$ и т. д.).
[0 б.] Сведение в индукционной оценке разбора случая, когда из висячей вершины остовного дерева выходят рёбра одного цвета, к недоказанной лемме: степень этой висячей вершины не меньше $N - k$.

Задача 10.4

Как и в решении, обозначим $c = \frac{1}{n-\sqrt{n/2}}$.

Оцениваются следующие продвижения (не суммируются друг с другом):
[0 б.] Рассмотрены все суммы, указано, что они лежат в диапазоне $[2; 4n + 10]$.

[0 б.] Рассмотрены суммы $a_i + a_j$ с фиксированной суммой индексов $i + j$, например, $i + j = 2n + 5$.
[1 б.] Полностью разобран случай двух «неудачных» пар, т. е. наличия двух индексов i и j таких, что $a_{i+1} - a_i < c$ и $a_{j+1} - a_j < c$ (включая случай $|i - j| = 1$).
[1 б.] Рассмотрены суммы $a_i + a_j$ с суммой индексов $i + j$ в некотором небольшом диапазоне, например, $2n + 1 \leq i + j \leq 2n + 9$.