Всероссийская олимпиада школьников по математике
2019–2020 уч. г.
Школьный этап

9 класс

Задача 1. Четырёхзначное число называется *восхитительным*, если оно само делится на 25, его сумма цифр делится на 25 и его произведение цифр делится на 25. Найдите все восхитительные числа.

Ответ: 5875 и 8575.

Решение. Сумма цифр четырехзначного числа не превосходит 36, поэтому у восхитительного числа она должна быть равна 25.

Поскольку восхитительное число делится на 25, оно оканчивается либо на 00, либо на 50, либо на 25, либо на 75.

Если четырехзначное число оканчивается на 00 или 50, то его сумма цифр не превосходит $9+9+5=23$, что нас не устраивает.

Если восхитительное число оканчивается на 25, то сумма первых двух цифр должна быть равна 18. Тогда это может быть только число 9925, но у него произведение цифр не делится на 25.

Значит, восхитительное число может оканчиваться только на 75. При этом сумма первых его двух цифр равна 13, а их произведение должно делиться на 5. Тогда эти две цифры — 5 и 8 (в любом порядке). □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

В остальных случаях суммировать следующие критерии:

1 б. Доказано, что сумма цифр четырехзначного восхитительного числа равна 25.

1 б. Доказано, что четырехзначное восхитительное число не может заканчиваться на 00 или 50.

1 б. Доказано, что четырехзначное восхитительное число не может заканчиваться на 25.

1 б. Приведён верный ответ.

Задача 2. У Маши в школе уроки заканчиваются в 13:00, мама встречает её на машине, и они едут домой. Однажды уроки закончились в 12:00, и Маша пошла домой пешком. По пути она встретила маму, которая, как обычно, поехала забирать дочь к 13:00 в школу. И дальше Маша с мамой поехали домой на машине, причём приехали на 12 минут раньше обычного. Во сколько Маша встретила маму на дороге? (Скорости Маши и мамы постоянны, время на посадку в машину не тратится.)

Ответ: 12:54.

Решение. Пусть Маша прошла пешком расстояние l. Тогда мама и по дороге к школе, и по дороге обратно проехала на l меньше, чем обычно. Значит, мама проезжает расстояние $2l$ за 12 минут. Тогда расстояние l она проезжает за 6 минут. Отсюда следует, что мама встретила Машу за 6 минут до того, как обычно приезжает в школу. Значит, их встреча произошла в 12:54. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. В верном решении допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. У уравнений $x^2+2019ax+b=0$ и $x^2+2019bx+a=0$ есть один общий корень. Чему может быть равен этот корень, если известно, что $a \neq b$?

Ответ: $\frac{1}{2019}$.

Решение. Пусть общий корень данных уравнений равен r. Тогда

$$r^2+2019ar+b=0=r^2+2019br+a.$$

Отсюда получаем, что $2019r(a-b)=(a-b)$. Поскольку $a \neq b$, из этого следует, что $r=\frac{1}{2019}$. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Составлена система уравнений, эквивалентная той, которая рассматривается в решении задачи, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Ирина выписала на доску в ряд некоторые целые числа от 0 до 999. В итоге получилось длинное число. Полина записала на свою часть доски все оставшиеся целые числа из этого же диапазона, в итоге получилось второе длинное число. Могли ли эти два длинных числа совпасть?

Ответ: не могли.

Решение. Предположим, что эти два длинных числа совпали. Тогда в одном из них встретится число 100. В другом числе такую последовательность цифр можно получить только приписыванием числа 0 к числу, кратному десяти (например, к числу 210 справа приписали 0).

Но в одном из длинных чисел присутствует число 200, и его, так как 0 уже занят, не получится воспроизвести во втором числе. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Присутствует идея рассмотрения двух подряд идущих нулей, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. На стороне AD квадрата $ABCD$ отметили точку K, а на продолжении луча AB за точку B — точку L. Известно, что $\angle LKC = 45°$, $AK = 1$, $KD = 2$. Найдите LB.

Ответ: $LB = 2$.

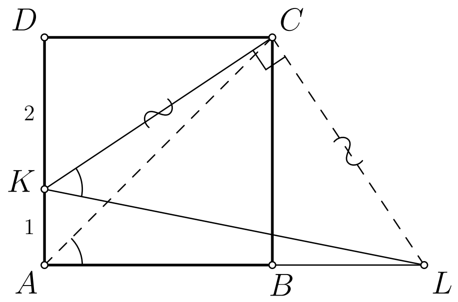

Рис. 1: к решению задачи 5

Решение. Заметим, что $\angle LAC = 45° = \angle LKC$, откуда следует, что четырёхугольник $LAKC$ вписанный. Тогда $\angle KCL = 90°$ (рис. 1). Значит, треугольник LCK равнобедренный прямоугольный, т. е. $LC = KC$. Прямоугольные треугольники BLC и DKC равны по гипотенузе и катету, поэтому $BL = KD = 2$. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказана вписанность четырёхугольника $LAKC$, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Экскурсионная группа из 6 туристов осматривает достопримечательности. Около каждой достопримечательности три человека фотографируются, а остальные их фотографируют. После какого минимального числа достопримечательностей каждый турист будет иметь фотографии всех остальных участников экскурсии?

Ответ: после 4 достопримечательностей.

Решение. Оценка. Всего нужно провести $6 \cdot 5 = 30$ фотографирований (рассматриваем фотографирование только между двумя людьми A и B, то есть если человек A сфотографировал 3 других участников B, C, D на одной фотографии — это 3 фотографирования $A \to B$, $A \to C$, $A \to D$).

За одну достопримечательность может произойти не более $3 \cdot 3 = 9$ новых фотографирований. Таким образом, трёх достопримечательностей не хватит.

Приведем пример, как можно организовать фотографирования около четырёх достопримечательностей. Пронумеруем людей от 1 до 6. Тогда мы можем организовать всё следующим образом:

- $(123) \to (456)$;
- $(145) \to (236)$;
- $(256) \to (134)$;
- $(346) \to (125)$.

Нетрудно проверить, что каждый сфотографирует каждого хотя бы один раз. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Доказано, что туристам необходимо пройти хотя бы 4 достопримечательности, но не указан способ фотографирования.

2 б. Указан способ фотографирования у четырёх достопримечательностей, чтобы выполнялось условия задачи, но не доказана оценка.

0 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.