

8 класс

Задача 1. Вася загадал двузначное число, а затем приписал к нему слева цифру 1, а справа — цифру 8, отчего число увеличилось в 28 раз. Какое число мог загадать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 56.

Решение. Пусть Вася загадал число n . При приписывании справа цифры 8 оно превращается в число $10n + 8$, а при приписывании слева цифры 1 оно увеличивается ещё на 1000, поэтому

$$\begin{aligned} 10n + 1008 &= 28n; \\ 18n &= 1008; \\ n &= 56. \end{aligned} \quad \square$$

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Верно составлено уравнение, но при его решении допущена арифметическая ошибка.

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. В классе за каждой партой сидят двое учеников. Парт, за которыми сидят двое мальчиков, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят две девочки. А парт, за которыми сидят две девочки, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят мальчик с девочкой. Сколько в классе мальчиков, если известно, что там 10 девочек?

Ответ: в классе 18 мальчиков.

Решение. Пусть парт, за которыми сидят мальчик с девочкой, x . Тогда парт с двумя девочками $2x$. Тогда всего девочек $2 \cdot 2x + x = 5x = 10$, откуда $x = 2$. Тогда парт с двумя мальчиками $4x = 8$. Значит, всего мальчиков $2 \cdot 8 + 2 = 18$. \square

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Верно найдено количество парт, за которыми сидят две девочки, но дальнейшее рассуждение отсутствует или неверно.

3 б. Верно найдено количество парт, за которыми сидят мальчик и девочка, но дальнейшее рассуждение отсутствует или неверно.

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. На доске записано натуральное число. Николай заметил, что может двумя способами приписать к нему цифру справа так, чтобы полученное число делилось на 9. Сколькими способами он может приписать к данному числу цифру справа так, чтобы полученное число делилось на 3?

Ответ: 4 способами.

Решение. Заметим, что разность между двумя числами, «замеченными» Николаем, меньше 10, но при этом делится на 9. Значит, эта разность равна 9. Это возможно только если приписанные цифры есть 0 и 9. Тогда легко видеть, что для делимости на 3 помимо этих двух цифр можно приписать также цифры 3 и 6. Итого 4 способа. \square

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

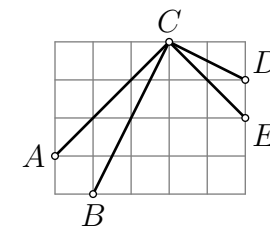
В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Доказано, что Николай в начале мог приписать только 0 или 9.

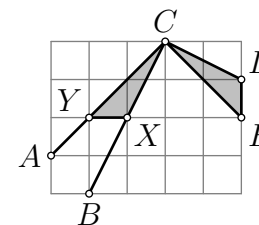
1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. На клетчатой бумаге отмечены точки A, B, C, D, E , как на рисунке справа. Докажите, что $\angle ACB = \angle DCE$.



Решение.



Отметим точки X и Y , как показано на рисунке. Заметим, что $\triangle CXY = \triangle CDE$ по трём сторонам, поэтому $\angle ACB = \angle ECD$, что и требовалось доказать. \square

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Доказано, что $\angle ACE = 90^\circ$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что $\angle BCD = 90^\circ$, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Архипелаг состоит из нескольких малых островов и одного большого. Было решено построить мосты между островами так, чтобы большой остров соединялся с каждым малым островом двумя мостами, а любые два малых острова были соединены одним мостом.

К 1 ноября были построены все мосты между малыми островами и несколько (не менее одного) мостов, ведущих на большой остров, — всего 28 мостов. Сколько всего островов в архипелаге?

Ответ: 8 островов.

Решение. Занумеруем малые острова архипелага. Если мост соединяет острова с номерами a и b , запишем на этом мосту меньшее из этих двух чисел.

Предположим, что число малых островов в архипелаге не более шести. Тогда мостов с номером 1 не более 5, мостов с номером 2 не более 4 и т. д. На большой остров ведет не более 12 мостов. Тогда всего решено построить не больше, чем

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 12 = 27 < 28$$

мостов, что противоречит условию.

Предположим, что число малых островов в архипелаге не меньше 8. Тогда мостов с номером 1 не менее 7, мостов с номером 2 не менее 6 и т. д. К большому острову построено не менее двух мостов, поэтому общее число построенных мостов не менее

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 = 30 > 28,$$

что также противоречит условию.

Значит, малых островов в архипелаге 7, а всего островов — 8. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

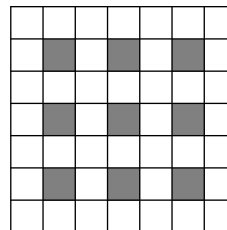
0 б. Задача не решена или решена неверно.

В остальных случаях суммировать следующие критерии (но ставить не более 4 б.):

2 б. Доказано, что количество островов не более восьми (если в доказательстве присутствует арифметическая ошибка, то 1 б.).

2 б. Доказано, что количество островов не менее восьми (если в доказательстве присутствует арифметическая ошибка, то 1 б.).

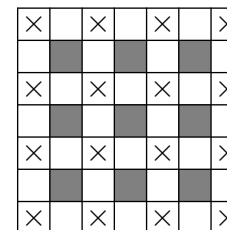
1 б. Приведён верный ответ.



Задача 6. Найдите наибольшее количество белых доминошек, которое можно вырезать из доски, изображённой слева. Доминошка — это прямоугольник 1×2 .

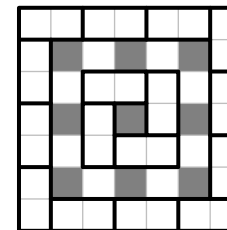
Ответ: 16 доминошек.

Решение. Отметим на доске крестиками следующие 16 клеток:



Заметим, что каждая доминошка должна содержать одну из отмеченных клеток, поэтому более 16 таких доминошек нам получить не удастся.

Остается привести пример для 16 доминошек:



Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что больше 16 доминошек вырезать не удастся, но не приведён пример, как это можно сделать.

1 б. Приведён пример, как можно вырезать 16 доминошек, но отсутствует доказательство, что больше вырезать нельзя.

0 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.