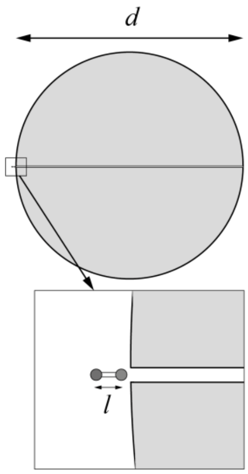
Задача 11.1. Диполь в шаре. В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.



Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_{\text{д}}$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_{\text{ш}}$.

Определите плечо диполя l, считая, что $l << d$.

Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

Возможное решение. Напряжённость внутри однородно заряженного шара можно найти из теоремы Гаусса:

$$E(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x ,$$

где ρ – объёмная плотность заряда шара, x – расстояние до центра шара.

На диполь в электрическом поле действует равнодействующая двух кулоновских сил. Для втягивания диполя в шар нужно расположить его таким образом, чтобы ближний к центру шара заряд был положительным, так как поле ближе к центру слабее, а нам надо добиться превосходства силы притяжения над силой отталкивания.

$$F_Д = F_+ - F_- = q(E(x+l) - E(x)) = \frac{ql\rho}{3\varepsilon_0} = \text{const} ,$$

где q – заряд диполя (модуль заряда каждого из шариков).

Таким образом, диполь будет разгоняться с постоянным ускорением $a_д$ до вылета из шара.

$$\begin{cases} d = \dfrac{a_д t_д^2}{2}, \\ a_д = \dfrac{ql\rho}{6m\varepsilon_0}, \end{cases}$$

где m – масса одного из шариков диполя.

$$t_д = \sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} \sqrt{\frac{4d}{l}} .$$

Рассмотрим движение одного шарика. Если заряд шарика по знаку совпадает с зарядом большого шара, то в канал его не втянет, значит в условии речь идёт о шарике с противоположным (отрицательным) зарядом.

Второй закон Ньютона запишется в виде:

$$ma = qE(x),$$

$$m\ddot{x} = -\frac{q\rho}{3\varepsilon_0} x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} .$$

До противоположного конца канала шарик долетит за время

$$t_ш = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}} .$$

Используя выражения для $t_ш$ и $t_д$, получаем ответ:

$$l = d\left(\frac{2}{\pi} \frac{t_ш}{t_д}\right)^2 .$$

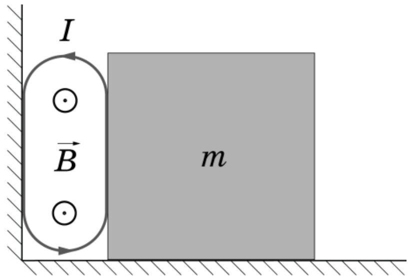
Критерии оценивания

1. Получено или использовано без вывода правильное выражение для напряжённости электрического поля $E(x)$ внутри шара	1,5 балла
2. Получено правильное выражение для силы, действующей на диполь в шаре	1,5 балла
3. Правильно указан знак заряда ближнего к центру шара шарика диполя в начальном положении	0,5 балла
4. Получено правильное уравнение движения диполя	1 балл
5. Получено правильное выражение для $t_д$	1 балл
6. Правильно указан заряд шарика, втягивающегося в шар	0,5 балла
7. Получено уравнение гармонических колебаний для движения шарика	2 балл
8. Получено правильное выражение для $t_ш$	1 балл
9. Получено правильное выражение для l	1 балл

Задача 11.2. Магнитная пружина. Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

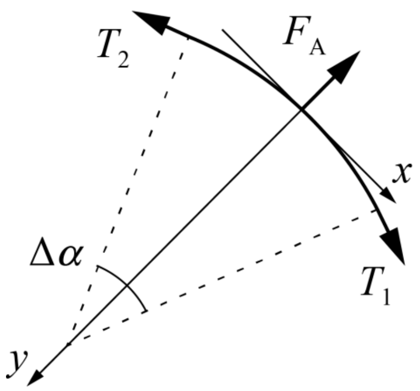
1) До какой наибольшей скорости υ_m разгонится куб, если его отпустить?

2) Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?



Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

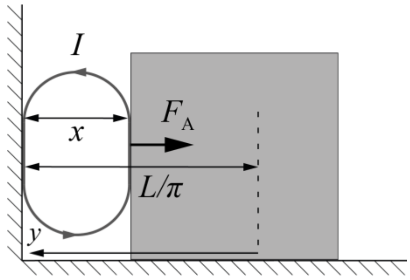
Возможное решение. Рассмотрим равновесие (бесконечно) малого участка провода, не контактирующего со стенкой или гранью куба, имеющего радиус кривизны R и угловой размер $\Delta\alpha$. Запишем условия равновесия в проекциях на оси x (проходит по касательной к проводу в середине участка) и y (проходит через центр кривизны участка). Учтём, что сила Ампера $F_A = IB\Delta l = IBR\Delta\alpha$:



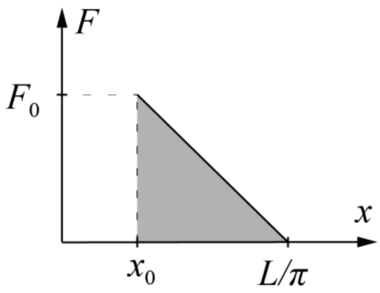
$$\begin{cases} T_1\cos(\Delta\alpha/2) = T_2\cos(\Delta\alpha/2); \\ T_1\sin(\Delta\alpha/2) + T_2\sin(\Delta\alpha/2) = IBR\Delta\alpha. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что натяжение провода постоянно: $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго (с учётом малости $\Delta\alpha$) – что радиус кривизны постоянен на «свободных» участках провода: $R = T/(IB) = \text{const}$. Значит, эти участки – дуги окружностей. Одновременно мы замечаем, что сила натяжения – конечная величина, а остальные силы (сила Ампера, сила реакции стенки или грани куба) для любого элемента – бесконечно малые величины (порядка Δl), поэтому угол поворота провода на любом участке – тоже бесконечно малая величина порядка Δl. Это означает, что в состоянии равновесия провод не имеет изломов. Поэтому можно сделать вывод, что в каждый момент времени после отпускания системы невесомый провод, находящийся в «квазиравновесном» состоянии, состоит из двух одинаковых полуокружностей с диаметром, равным x, и двух одинаковых линейных участков, прижатых к стенке и грани куба. Следовательно, длина линейного участка провода, соприкасающегося с гранью куба, равна $l(x) = (L - \pi x)/2$. Куб разгоняется за счёт давления этого участка, которое возникает из-за силы Ампера $F_A = IBl(x) = IB(L - \pi x)/2$.

Поэтому разгон, начинающийся при $x = x_0$, заканчивается при $x = L/\pi$, когда провод перестаёт соприкасаться с гранью куба.



Обратим внимание, что поведение разгоняющий силы в точности совпадает с поведением силы упругости пружины длиной L/π с коэффициентом жёсткости $k = \pi IB/2$. Поэтому движение в процессе разгона соответствуют четверти периода гармонических «колебаний» на пружине от начальной деформации $y_0 = \frac{L}{\pi} - x_0$ до «положения равновесия». Максимальная скорость разгона



$$\upsilon_m = \omega y_0 = y_0\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Другой способ вычисления максимальной скорости – это использование закона изменения кинетической энергии. Поскольку сила, действующая на куб, зависит линейным образом от его перемещения, то её работу можно вычислить как площадь под графиком $F(x) = IB(L - \pi x)/2$. Следовательно, изменение кинетической энергии куба в процессе разгона

$$\frac{m\upsilon_m^2}{2} = A_F = \frac{1}{2}F_0\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right) = \frac{\pi IB}{4}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)^2,$$

то есть

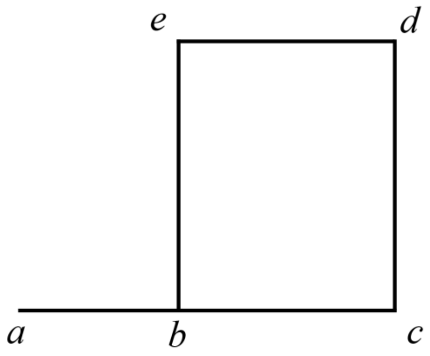
$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Время разгона равно четверти «периода колебаний»: $t_m = \frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2IB}}$.

Критерии оценивания.

№	результат	максимальный балл
1.	Доказано (с использованием условия равновесия провода), что участки провода, не соприкасающиеся со стенкой или гранью куба, имеют форму полуокружностей: • постоянство радиуса кривизны на «свободных» участках – 1,5 балла; • отсутствие изломов – 0,5 балла.	2
2.	Правильно найдена длина участка провода, соприкасающегося с гранью куба: • указано (в том числе без доказательства), что в любой момент времени провод состоит из двух линейных участков и двух полуокружностей с диаметром, равным x – 0,5 балла; • получена формула $l(x)=\dfrac{L-\pi x}{2}$ – 0,5 балла.	1
3.	Указано (или используется в решении), что разгон куба прекращается при $x = L/\pi$	1
4.	Найдена величина силы, действующей на куб со стороны провода как функция расстояния x: • записано соотношение $F = IBl(x)$ – 0,5 балла; • получена правильная формула $F_A = IB(L-\pi x)/2$ – 1,5 балла	2
5.	Правильно найдена величина максимальной скорости куба $\upsilon_m=\sqrt{\dfrac{\pi IB}{2m}}\left(\dfrac{L}{\pi}-x_0\right)$ из закона изменения энергии: • правильно вычислена работа силы – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл. из кинематики гармонического движения: • указано на гармоничность движения и записана формула $\upsilon_m=\omega y_0$ – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл	2
6.	Правильно найдено время разгона $t_m=\sqrt{\dfrac{\pi m}{2IB}}$: • указано, что время разгона соответствует четверти «периода» гармонического движения – 1 балл; • получен правильный ответ для t – 1 балл	2
	ВСЕГО	10

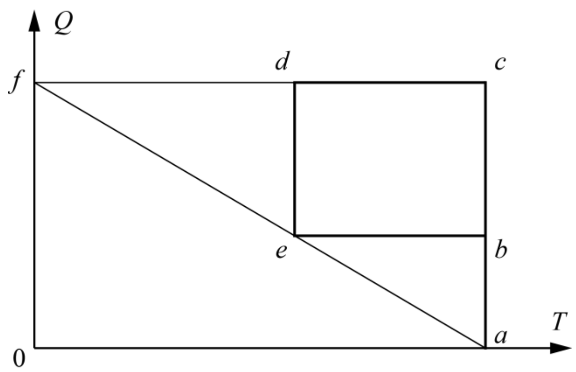
Задача 11.3. Обрывок из архива Кельвина. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (см. рис.) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – количество подведённой теплоты) и имела вид ломаной линии $abcdeb$. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте в работе диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.



Возможное решение. Поскольку все отрезки параллельны координатным осям Q и T, на рисунке представлен цикл Карно. Отрезки cd и eb не могут быть параллельны оси Q, иначе в точке b температура отличается от температуры точки a, а это невозможно в циклическом процессе. Поэтому abc и de параллельны оси Q, а cd и eb – оси T. Ось температур должна проходить через точку a, так как с неё начинается отсчёт подведённой теплоты.

Перейдём к построению осей. Здесь и далее подстрочный индекс «х» относится к холодильнику, индекс «н» – к «нагревателю». КПД цикла Карно $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}$, откуда $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}$.

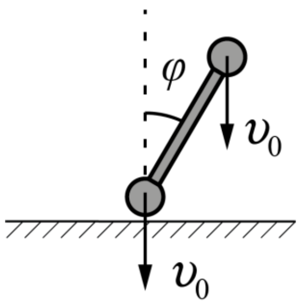
Проведём прямые через cd и ae. Они пересекаются в некоторой точке f. Так как длина ed соответствует $Q_х$, длина ac соответствует $Q_н$, ed – изотерма при $T_х$, а ac – изотерма при $T_н$, то из последнего соотношения следует, что прямые cd и ae пересекаются на оси Q над началом координат. Таким образом, точка f принадлежит оси Q и лежит над началом координат. Проведём прямую, параллельную cd через точку a и проведём перпендикуляр к ней из точки f. Точка пересечения даст нам начало координат, а сам перпендикуляр будет являться осью Q. В условии указано, что это цикл тепловой машины, следовательно, это прямой цикл, поэтому ось Q имеет направление, указанное на рисунке.



Критерии оценивания

1) Указано, что на рисунке цикл Карно	1 балл
2) Указано, что abc и de – изотермы	1 балл
3) Указано, что cd и eb – адиабаты	1 балл
4) Использовано соотношение $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}$ или эквивалентное ему	2 балла
5) Установлено, что ось температур проходит через точку a и верно указано её направление	1,0 балл
6) Показано, что точка пересечения прямых cd и ae принадлежит оси Q	3 балла
7) Восстановлена ось Q и верно указано её направление	1,0 балл

Задача 11.4. Падающая гантель. Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины L, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны v_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.



1) Каковы величина скорости центра масс гантели v_c и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

Возможное решение

Определение скорости центра масс и угловой скорости

Вариант 1. Рассмотрим момент времени сразу после удара. Из закона сохранения энергии следует

$$m{v_0}^2 = \frac{m({v_1}^2 + {v_2}^2)}{2}$$
$${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2,$$

где индексы 1 и 2 обозначают нижний и верхний шарики, соответственно.

Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и находится из выражения

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}{2}$$
$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Из закона сложения скоростей $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ имеем

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = v_0\sqrt{2}.$$

Угловая скорость вращения стержня равняется $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$.

Таким образом, ответы на первый вопрос:

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \text{ и } \omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Вариант 2. Найти скорость центра масс и угловую скорость стержня можно также, используя теорему Кёнига:

$$E_{\text{кин}} = 2m\frac{{v_c}^2}{2} + E_{\text{вр}} = m{v_0}^2.$$

Здесь $E_{\text{вр}} = 2m\frac{(\frac{\omega L}{2})^2}{2} = \frac{m\omega^2 L^2}{4}$ представляет собой кинетическую энергию вращения системы относительно центра масс, v_c – скорость центра масс после удара. Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и определяется выражением $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$. С учётом перпендикулярности $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{2}.$$

Из закона сохранения энергии ${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2$. Подставляя это в выражение для v_c, получаем

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя выражения для $E_{\text{вр}}$ и v_c в уравнение для $E_{\text{кин}}$, получим для угловой скорости тот же ответ, что и первым способом:

$$\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Примечание. Возможны другие варианты, комбинирующие закон сохранения энергии и условие перпендикулярности векторов. Все они оцениваются одинаково при корректном получении правильных ответов.

Определение угла φ

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика)

Ответ можно получить, используя тот факт, что для верхнего шарика выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню. Этот факт следует из того, что единственная сила, действие которой на верхний шарик за бесконечно малое время соударения существенно – это сила реакции стержня, направленная строго вдоль стержня. До удара проекция скорости шарика на эту ось равна

$$v_x = v_0 \sin\varphi.$$

После удара, воспользовавшись законом сложения скоростей, получим для проекции

$$v_x = \frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi.$$

Из этих двух уравнений, используя ранее полученные выше выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ:

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0 + v_c)} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°.$$

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

Внешняя сила, действующая на гантель во время удара – сила нормальной реакции гладкой поверхности – имеет нулевое плечо относительно точки удара нижнего шарика о поверхность. Поэтому момент импульса гантели относительно оси, проходящей через эту точку, сохраняется. При этом момент импульса гантели относительно этой оси равен моменту импульса верхнего шарика 2, а скорость которого после удара $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$. Мы уже знаем, что сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и равна по величине $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Скорость вращения $\vec{v}_{\text{вр}2}$ направлена перпендикулярно стержню, а её модуль $\left|\vec{v}_{\text{вр}2}\right| = \frac{\omega L}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Поэтому закон сохранения момента импульса имеет вид

$$mv_0 Lsin\varphi = -m\frac{v_0}{\sqrt{2}}Lsin\varphi + mL\frac{v_0}{\sqrt{2}}\,.$$

Выражая из этого соотношения синус искомого угла, получим $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Итак, $\varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°$.

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

В случае непостоянства момента импульса относительно выбранной точки мы должны учесть изменение момента импульса из-за внешних сил. В рамках данной задачи момент импульса может меняться только под действием реакции поверхности. Из теоремы о движении центра масс найдём импульс, переданный поверхностью шарикам,

$$\Delta P_N = 2m(v_0 + v_c)$$

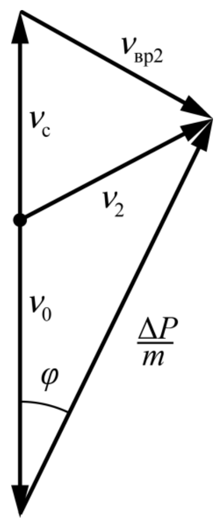
Запишем закон изменения момента импульса относительно центра масс:

$$2\frac{mL^2\omega}{4} = \frac{mL^2\omega}{2} = \frac{\Delta P_N L \sin\varphi}{2}.$$

Отсюда, используя ранее полученные выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ.

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Вариант 4 (использование векторных диаграмм).



Поскольку стержень невесом, а время удара мало, изменение импульса верхнего шарика $\Delta\vec{P}$ направлено вдоль стержня. Представим скорость этого шарика двумя способами:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$$

Здесь $\vec{v}_{\text{вр}2}$ - скорость верхнего шарика в системе центра масс после удара. Поскольку стержень твёрдый, $\frac{\Delta\vec{P}}{m}$ и $\vec{v}_{\text{вр}2}$ перпендикулярны. Изобразим это геометрически.

Поскольку $v_{\text{вр}2} = \frac{\omega L}{2}$, из прямоугольного треугольника получим:

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Критерии оценивания

Ответ на вопрос 1 (5 баллов)

Вариант 1 (кинематика)

1. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ — 1 балл
2. Записано выражение для скорости центра масс $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}$ — 0,5 балла
3. Получено верное выражение для скорости центра масс $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ — 1 балл
4. Выражение для угловой скорости вращения через относительную скорость шариков $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$ — 1 балл
5. Выражение для относительной скорости движения шариков $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2{}^2}$ — 0,5 балла
6. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование теоремы Кёнига)

1. Использовано при решении выражение для кинетической энергии гантели после удара в виде $E_{\text{кин}} = 2m\frac{v_c{}^2}{2} + E_{\text{вр}} = mv_0{}^2$ — 1 балл
2. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ — 0,5 балла
3. Из определения скорости центра масс $\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}{2}$ и закона сохранения энергии $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$, с учётом перпендикулярности $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$, получено выражение для v_c, а именно $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ — 1,5 балла
4. Использовано для решения выражение для энергии вращения в системе центра масс $E_{\text{вр}} = \frac{m\omega^2 l^2}{4}$ — 1 балл
5. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Ответ на вопрос 2 (5 баллов)

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика) вдоль

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена стержня и проекция импульса на перпендикулярное направление сохраняется — 1 балл
2. Выражение для проекции импульса верхнего шарика на направление, перпендикулярное стержню до удара, $p_x = mv_0 \sin\varphi$ — 1 балл
3. Выражение для проекции импульса верхнего шарика после удара на направление, перпендикулярное стержню, с использованием полученных выражений для скорости центра масс и угловой скорости вращения $p_x = m(\frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi_0)$ — 2 балла

4. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

1. Записан закон сохранения момента импульса относительно точки удара нижнего шарика о поверхность — 3 балла
2. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

Всего: 5 баллов

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

1. Выражение для импульса, полученного гантелей при столкновении с поверхностью $P_N = 2m(v_0 + v_c)$ — 1 балл
2. Записан закон изменения момента импульса относительно выбранной участником точки — 2 балла
3. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

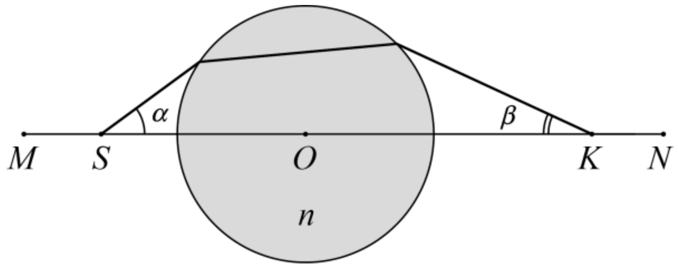
Всего: 5 баллов

Вариант 4 (использование векторных диаграмм)

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена вдоль стержня — 1 балл
2. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через изменение импульса для верхнего шарика $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$ — 1 балл
3. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через скорость центра масс и скорость второго шарика в системе центра масс $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$ — 1 балл
4. Использована векторная диаграмма и перпендикулярность $\vec{v}_2$ и $\Delta\vec{P}$ — 1 балл
5. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Задача 11.5. Прозрачный шарик. Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара, пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.



1) Выразите радиус R шара и расстояние SO от источника до центра шара через параметры l, α, β, n.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2$, $\alpha = 60$°C, $\beta = 30$°C, $l = 10$ см.

Возможное решение

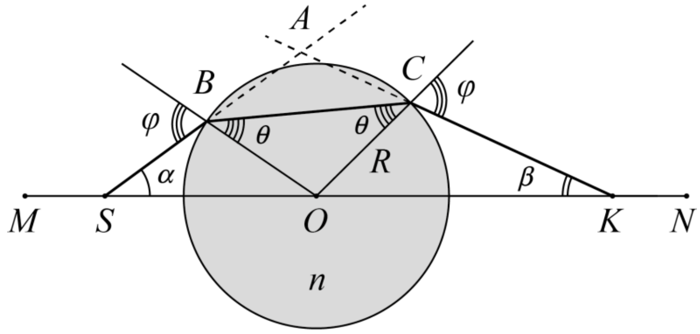


рис.1.

Пусть B – точка падения луча, о котором идёт речь в задаче, на поверхность шара (рис.1.), C – точка выхода луча из шара, φ и θ – углы падения и преломления, связанные законом Снелла: $\sin\varphi = n\sin\theta$, A – точка пересечения продолжений лучей SB и CK. Так как треугольник OBC – равнобедренный, то угол падения в точке C равен углу преломления θ в точке B. Согласно закону преломления угол преломления в точке C будет равен углу падения φ в точке B. С учётом этого, по теореме синусов, для треугольников SBO и OCK:

$$\frac{SO}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{OK}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Следовательно, $$\frac{SO}{OK} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Тогда ответ на первый вопрос: $$SO = l\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Обратите внимание на то, что и в точке B, и в точке C угол отклонения луча при преломлении равен $\gamma = \varphi - \theta$. Поэтому полный угол отклонения луча равен 2γ. Следовательно, $\angle SAK = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\gamma$, то есть $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Таким образом, справедливо соотношение $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \gamma)} = n$, из которого следует:

$$\sin\varphi = n\sin\varphi\cos\gamma - n\sin\gamma\cos\varphi.$$

Из последнего уравнения находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{n\cos\gamma - 1}$ и $\sin\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}$.

Из теоремы синусов для треугольника SBO следует $\dfrac{SO}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

Запишем формулы для ответа на второй вопрос:

$$R = SO\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = l\frac{\sin\alpha\sin\beta\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}{(\sin\alpha + \sin\beta)n\sin\gamma}.$$

После подстановки заданных численных значений получаем: SO = 3,66 см, R = 3,30 см.

Критерии оценивания

1. Проведён анализ хода луча в шаре, то есть на рисунке отмечены углы падения и преломления для луча, падающего на шар, и луча, выходящего из шара	0,5 балла
2. Записан закон Снелла для этих лучей $\sin\varphi = n\sin\theta$	0,5 балла
3. Указано (или используется в решении), что угол падения при входе луча в шар равен углу преломления при выходе из шара и угол преломления при входе в шар равен углу падения при выходе	1 балл
4. Получено соотношение $\frac{SO}{OK} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ или эквивалентное	1 балл
5. Получен верный ответ для SO	1 балл
6. Получено верное выражение для связи угла поворота луча с углами α и β $\left(\varphi - \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ или эквивалентное	1 балл
7. Получено верное выражение для угла падения или угла преломления через данные задачи	1 балл

Примечание: *если это выражение получено другим корректным способом, без вычисления угла поворота луча, то балл за п.6 тоже ставится.*

8. Получен верный ответ для R	2 балла
9. Получено численное значение SO	1 балл
10. Получено численное значение R	1 балл