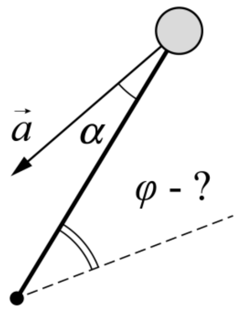
Задача 10.1 Шарик на нити. Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (см. рисунок). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?



Возможное решение. Шарик движется под действием двух сил: силы сопротивления воздуха, направленной против скорости и обеспечивающей тангенциальную составляющую ускорения, и силы натяжения нити, направленной вдоль нити и обеспечивающей центростремительную составляющую ускорения.

Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = a\sin\alpha = k\upsilon / m$, где υ – скорость, k – коэффициент в формуле для силы сопротивления, а m – масса шарика.

Центростремительная составляющая ускорения $a_{\text{цс}} = a\cos\alpha = \upsilon^2 / R$, где R радиус окружности.

Отношение этих составляющих даёт $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{k\upsilon R}{m\upsilon^2} = \dfrac{kR}{m\upsilon}$.

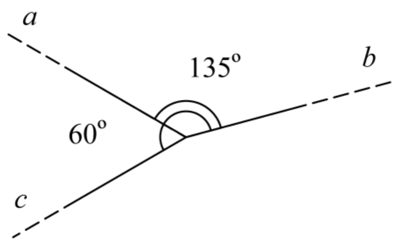
Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление движения для произвольного i - го момента времени: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\upsilon_i = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$, где S - пройденный путь. Сократив на dt_i получим: $md\upsilon_i = -kdS_i$. Последнее выражение справедливо для любого малого момента времени. Запишем такое выражение для каждого момента времени и просуммируем их по всем временным отрезкам, тогда получим: $m\Delta\upsilon = -k\Delta S$. Отсюда: $m(0-\upsilon) = -k(S-0)$, или

$S = \dfrac{m\upsilon}{k} = \dfrac{R}{\mathrm{tg}\alpha} = R\varphi$. Окончательно получаем $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$.

Критерии оценивания

1	Из второго закона Ньютона получено выражение для тангенциальной составляющей ускорения $a_\tau = k\upsilon / m$	1 балл
2	Получено выражение для угла α: $\mathrm{tg}\alpha = kR/(m\upsilon)$	2 балла
3	Записан второй закон Ньютона в дифференциальной форме (для малого момента времени) в проекции на направление движения: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$	2 балла
4	Корректно осуществлен переход к конечным приращениям: либо через суммирование, либо через интегрирование. (*Если потеряны знаки, то снимается 2 балла*.)	3 балла
5	Получен итоговый ответ: $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$	2 балла

Задача 10.2. Бильярд на льду. На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.



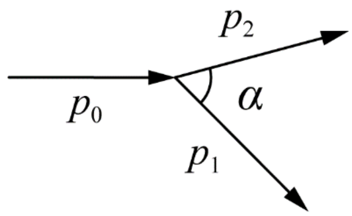
1) Определите, какая из трёх траекторий - «*a*», «*b*» или «*c*» - может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите:

А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения;

Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

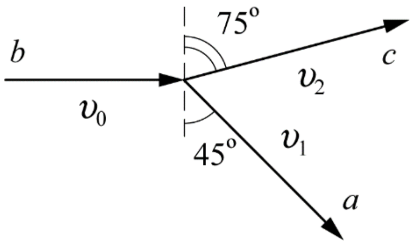
Боковые поверхности шайб гладкие.



Возможное решение. Из закона сохранения импульса $\left(\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)$ получим $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha$, где α – угол разлёта (см. рис.).

При частично упругом столкновении кинетическая энергия налетающей шайбы больше суммы кинетических энергий шайб после столкновения. Здесь и далее кинетическую энергию удобно выразить через импульс: $E_{\text{кин}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$.

$\dfrac{p_0^2}{2m} = \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m} + Q;$ где Q – энергия, перешедшая в тепло в результате столкновения шайб.



Тогда $\dfrac{p_0^2}{2m} > \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m}$. Подставляя p_0^2, получим: $p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha > p_1^2 + p_2^2$, откуда $\cos\alpha > 0,\ 0 < \alpha < 90^\circ$.

Следовательно, в результате частично упругого столкновения шайбы разлетаются под острым углом, и траектория «*b*» принадлежит налетающей шайбе перед столкновением. Геометрия столкновения теперь выглядит так:

направив одну координатную ось вдоль траектории налетающей шайбы, а вторую – перпендикулярно, для проекций импульса на эти оси получим:

$$p_1\cos 45^\circ = p_2\cos 75^\circ,$$

$$p_1\sin 45^\circ + p_2\sin 75^\circ = p_0.$$

Отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки, равно отношению их кинетических энергий сразу после столкновения:

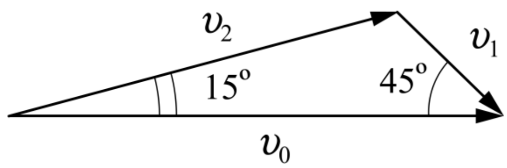
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \left(\frac{\cos 75^\circ}{\cos 45^\circ}\right)^2 \approx 0{,}13 \text{ или } \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\cos 45^\circ}{\cos 75^\circ}\right)^2 \approx 7{,}46.$$

Найдём долю кинетической энергии, переходящую в тепло.

$$Q = E_0 - E_1 - E_2 = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2\right) = \frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{m}$$

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{p_0^2}.$$

Рассмотрим треугольник скоростей:



Из теоремы синусов:

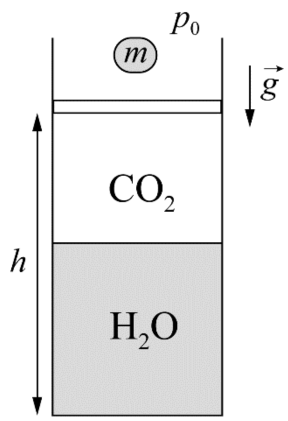
$$p_1 = p_0 \frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ};\ \ p_2 = p_0 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos 60^\circ}{p_0^2} = 2\frac{\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\left(\sin 120^\circ\right)^2} \approx 0,24.$$

Критерии оценивания

1	Записан закон сохранения импульса	1 балл
2	Записан закон сохранения энергии с учетом потерь	1 балл
3	Аргументированно указано, какая из траекторий принадлежит налетающей шайбе. *(Если аргументация отсутствует или не является обоснованной, то баллы за этот пункт не ставятся, но за дальнейшее решение баллы следует ставить согласно критериям*	3 балла
4	Указано, что отношение пройденных до остановки путей равно отношению квадратов импульсов (скоростей) шайб	1 балл
5	Получено верное выражение для отношения путей: S_1 / S_2 или S_2 / S_1	1 балл
6	Получено верное численное значение для отношения путей	1 балл
7	Получено верное выражение для Q / E_0	1 балл
8	Получено верное численное значение для Q / E_0	1 балл



Задача 10.3. Газировка. В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем. Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии.

Определите:

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

Считайте, что температура в сосуде постоянна, и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется. Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

Возможное решение. Пусть в жидкости объёма V_0 при давлении p растворяется газ, занимающий в виде газовой фазы объём V при том же давлении p. В соответствии с законом Генри $V = kV_0$, и можно считать, что жидкость объёма V_0 представляет собой «дополнительный» объём для газа над жидкостью, помимо объёма, который занимает сам газ. В нашем случае при записи уравнения состояния, будем считать, что объём углекислого газа складывается из «дополнительного» объёма $V_0 = kSh/2$ и объёма между поршнем и поверхностью воды при неизменной массе газа. Обозначим Δp – избыточное давление, которое создаёт гиря массы m. Тогда после установки на поршень одной гири:

$$(p_0 + \Delta p)\left(kS\frac{h}{2} + S\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right)\right) = p_0\left(kS\frac{h}{2} + S\frac{h}{2}\right).$$

Поделив обе части уравнения на p_0S, получаем:

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1\right) = \frac{h}{2}(k+1)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\Delta h_1 = \frac{\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \qquad (1)$$

Для двух гирь:

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1 - \Delta h_2\right) = \frac{h}{2}(k+1);$$

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{2\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \qquad (2)$$

Поделив (2) на (1) получаем

$$\frac{1 + \frac{2\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{\Delta p}{p_0}} \cdot \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{\Delta h_1} = 2$$

Подставив Δh_1 и Δh_2, находим $\frac{\Delta p}{p_0} = 0{,}2$, $m = \frac{\Delta pS}{g} = 2$ кг.

Далее из (1) находим $k = 0{,}87$.

Пусть Δp_x – избыточное давление на поршень, при котором он опустится до поверхности жидкости. Тогда

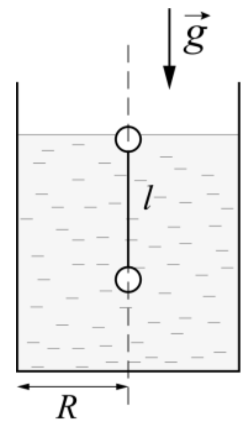
$$(p_0 + \Delta p_{\text{x}})\frac{h}{2}kS = p_0\frac{h}{2}(k+1)S,$$

откуда $\Delta p_{\text{x}} \approx 1{,}15p_0$, и общая масса груза на поршне при этом $m_x = \frac{\Delta pS}{g} = 11{,}5$ кг. Таким образом, дополнительно необходимо поставить на поршень груз $\Delta m = m_x - 2m \approx 7{,}5$ кг.

Критерии оценивания

1	Корректно записан закон Генри в форме, применимой для выбранного способа решения задачи: либо через объёмы, как в авторском решении, либо через количество вещества/массы растворённого газа в зависимости от внешнего давления.	1 балл
2	Записано уравнение состояния газа для первого опыта (с учётом растворённого газа)	2 балла
3	Записано уравнение состояния газа для второго опыта (с учётом растворённого газа)	1 балл
4	Получено правильное выражение для массы m_0 гири	1 балл
5	Получено правильное численное значение массы гири	1 балл
6	Записано уравнение состояния газа для случая растворения в воде всего газа	2 балла
7	Получено правильное выражение для общей массы всех гирь или массы m_2 дополнительной гири	1 балл
8	Получено верное численное значение массы дополнительной гири (*если ученик забыл вычесть 2m, то балл не ставится*)	1 балл

Задача 10.4. Крутится, вертится. Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длинной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.



Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

Возможное решение. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда и сила натяжения нити $\vec{T}$; в сумме они создают центростремительное ускорение, равное $\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = -\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику).

Для начала найдём, чему равна сила Архимеда в данной ситуации. Так как сила Архимеда – это сумма сил давления воды на всю поверхность шарика, то она не зависит от материала, из которого изготовлен шарик. Заменим исходный шарик на точно такой же, но сделанный из воды. Очевидно, что он будет неподвижен относительно основной массы воды, а значит, сумма действующих на него сил тяжести и Архимеда будет обеспечивать центростремительное ускорение.

$$\rho_{\text{в}}V\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = \rho_{\text{в}}V\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}},$$

откуда

$$\overrightarrow{F_{\text{арх}}} = -\rho_{\text{в}}V(\vec{g} + \omega^2\vec{r}).$$

Второй закон Ньютона для каждого из шариков будет выглядеть следующим образом:

$$-m\omega^2\vec{r} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T}.$$

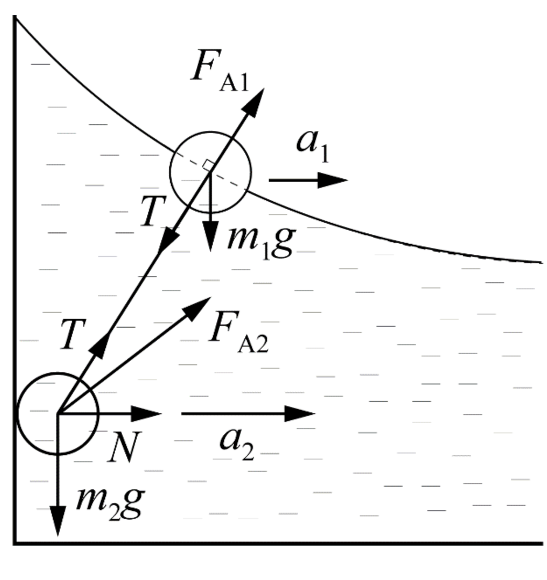
Для удобства, перенесём слагаемое $m\omega^2\vec{r}$ в правую часть равенства

$$\vec{0} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T} + m\omega^2\vec{r}.$$

Заметим, что сумма $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$ направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находится по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма $m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + m\omega^2\vec{r}$ будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно, только если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.

Расставим все силы на рисунке.



Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити: $m_1 g\ sin\alpha = m_1\omega^2 r_1\ cos\alpha$

где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\ sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}\ .$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж g V - T\ cos\alpha = 0$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж g V}{cos\alpha}$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать

$$m_2 g - \rho_ж g V - T_0 = 0.$$

Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

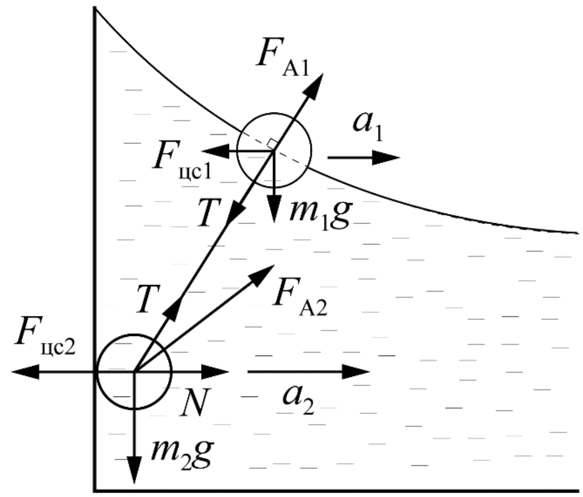
Критерии оценивания

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Альтернативное решение (Неинерциальная СО)

Перейдём в НИСО связанную с вращающимся сосудом. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, центробежная сила $m\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику), сила Архимеда $-\rho_в V(\vec{g} + \omega^2\vec{r})$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Заметим, что сумма силы тяжести и центробежной силы направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот, от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находиться по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма сил тяжести - центробежной и Архимеда - будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно только в случае, если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.



Расставим все силы на рисунке.

Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме сил тяжести и инерции, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити:

$$m_1 g\ sin\alpha - m_1\omega^2 r_1\ cos\alpha = 0$$

где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\ sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}\ .$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж gV - T\ cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж gV}{cos\alpha}\ .$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать. Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

Критерии оценивания альтернативного решения

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Задача 10.5. Три элемента. Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трёх элементов: резистора с сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 1) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что вольтамперная характеристика неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе сила тока, протекающего через него, не убывает).
Вольтамперная характеристика «черного ящика» показана на рисунке 2.

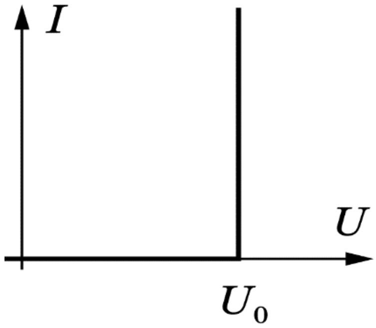


Рис. 1

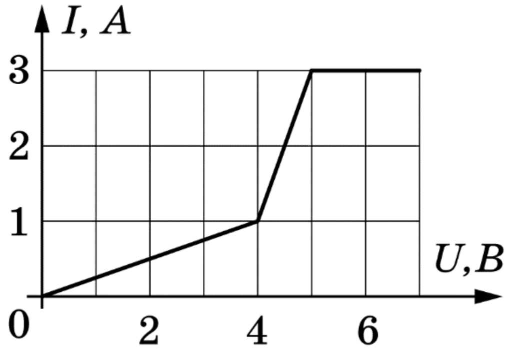
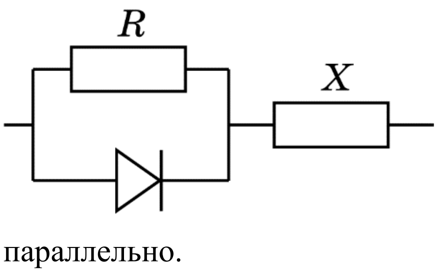


Рис. 2

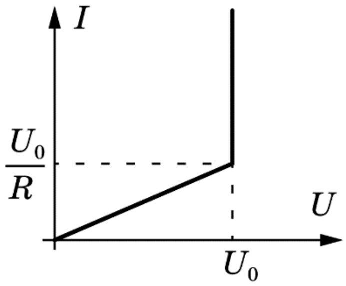
Определите:
1) Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.
2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.
3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения $U_{\max}$ открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

Возможное решение. Из ВАХ ЧЯ видно, что, начиная с некоторого значения внешнего напряжения, сила тока через ЧЯ перестает возрастать. Ни резистор, ни диод, ни их последовательное или параллельное соединение не могут так ограничивать силу тока. Значит, сила тока ограничивается неизвестным нелинейным элементом. Если бы параллельно элементу X располагался ещё какой-то участок цепи, то элемент X не смог бы ограничить общий ток через ЧЯ. Таким образом участок цепи, содержащий резистор и диод, должен быть подключён последовательно к элементу X. Оставшиеся два элемента могут быть соединены друг с другом последовательно или параллельно. Так как диод не пропускает ток при малых напряжениях, а на ВАХ ЧЯ ток при малых напряжения присутствует, то диод должен быть соединён с резистором параллельно.



Участок цепи с параллельно соединёнными диодом и резистором имеет вольтамперную характеристику, изображённую ниже.



ВАХ ЧЯ получается путём сложения вдоль оси напряжений ВАХ цепи резистор-диод и ВАХ нелинейного элемента. В самом деле, при последовательном соединении элементов через них протекает один и тот же ток, а напряжения складываются.

Понятно, что напряжение открытия диода не может превышать 5В, так как напряжение на нелинейном элементе не отрицательно, а ВАХ цепи резистор-диод не имеет горизонтального участка при силе тока 3А. ВАХ нелинейного элемента получается путём вычитания из ВАХ чёрного ящика ВАХ цепи резистор-диод. Пунктирной линией изображена ВАХ цепи диод-резистор, а точками ВАХ неизвестного нелинейного элемента.

Если открытие диода происходит при напряжении $U < 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 1 (для $U_0 = 2\text{ В}$). Если же открытие диода происходит при $U > 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 2 (для $U_0 = 4\text{ В}$). В таком случае ВАХ элемента X имеет участок, на котором сила тока возрастает с уменьшением напряжения, что противоречит условию задачи.

При $U \le 4\text{ В}$ напряжение $U_0 = 7/8\,U$, поскольку $U_0 = IR$, а $U = I \cdot 4\text{ Ом}$, где I – сила тока в цепи в момент открытия диода. Значит, $\max U_0 = 3{,}5\text{ В}$. Соответствующая этому случаю ВАХ элемента X представлена на рис. 3.

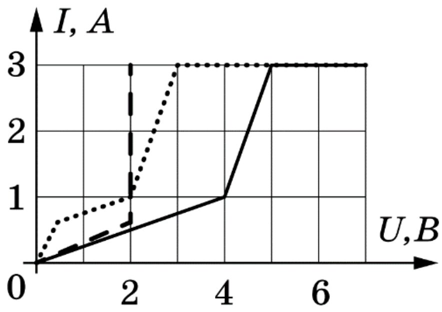


Рис. 1

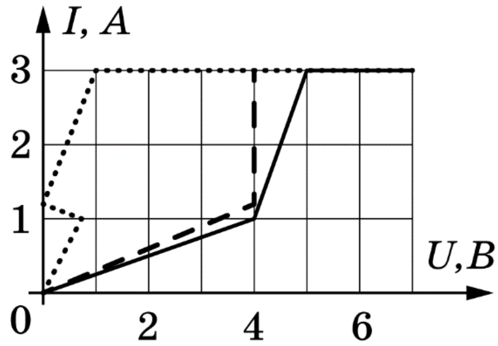


Рис. 2

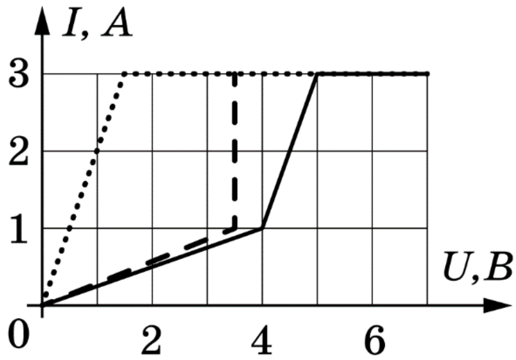


Рис. 3

Критерии оценивания

1	Указано, что нелинейный элемент подключён последовательно остальным	1 балл
2	Утверждение из п. 1 корректно обосновано	1 балл
3	Указано, что диод и резистор соединены параллельно	1 балл
4	Утверждение из п.3 корректно обосновано	1 балл
5	Приведена схема ЧЯ	1 балл
6	Указано, что напряжение открытия диода не более 5В	1 балл
7	Обосновано, что напряжение открытия не может быть более 3,5 В	1 балл
8	Найдено одно значение напряжения открытия в интервале 0-3,5 В и для него построена ВАХ нелинейного элемента	1 балл
9	Указано, что любое напряжение открытия в интервале 0-3,5 В подходит.	1 балл
10	Построены две ВАХ: для напряжения 3,5 В и одного из напряжений: 1, 2 или 3 В.	1 балл

Примечание: Если построена только одна ВАХ нелинейного элемента, для напряжения открытия от 0 до 3,5 В, то это оценивается в пункте 8, а за пункт 10 баллы не ставятся.