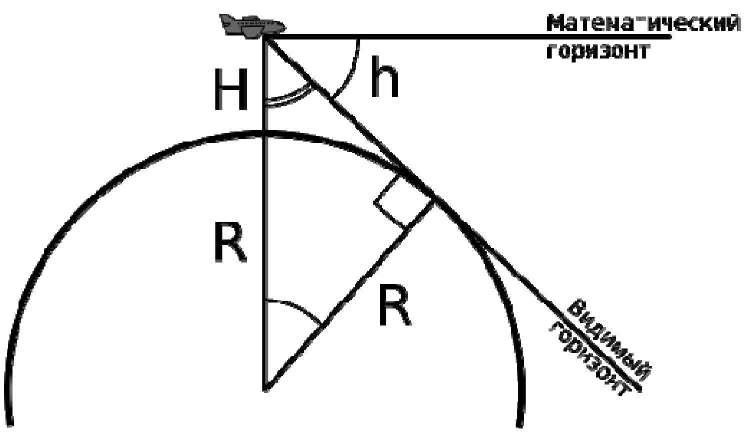
2. Решения заданий Регионального этапа и система оценивания каждого задания.

9 класс

9.1. Условие. Самолет летит на высоте 10 км над поверхностью Земли 21 июня. Его пассажиры видят, как Солнце «замерло» и все время находится в точке севера на видимом горизонте. Определите скорость самолета. Рефракцией, поглощением света в атмосфере, угловыми размерами Солнца, рельефом и сжатием Земли пренебречь.

9.1. Решение. Солнце находится на северном горизонте, то есть в верхней или нижней кульминации для неподвижного наблюдателя. В этот момент суточное движение Солнца происходит параллельно горизонту. Движение самолета компенсирует вращение Земли, поэтому Солнце постоянно видно в точке кульминации. Его склонение вблизи летнего солнцестояния постоянно, поэтому можно сделать вывод, что самолет летел вдоль параллели. Нам нужно найти ее широту.

Хотя по условии задачи мы пренебрегаем рефракцией и видимыми размерами Солнца, мы должны учесть другой фактор: понижение видимого горизонта за счет высоты самолета.



Пусть самолет летит на высоте H над поверхностью Земли. Радиус Земли равен R. Угол h между направлениями на видимый и математический горизонты равен углу с вершиной в центре Земли между направлением на самолет и точку касания луча зрения пассажиров с поверхностью Земли (см. рисунок). Видимый горизонт будет иметь высоту

$$h = -\arccos\frac{R}{R+H} = -3.2^{\circ}.$$

Нам остается найти широту, на которой Солнце оказывается на высоте –3.2° под северным горизонтом, имея склонение ε (+23.4°). Если это была нижняя кульминация, то справедливо соотношение

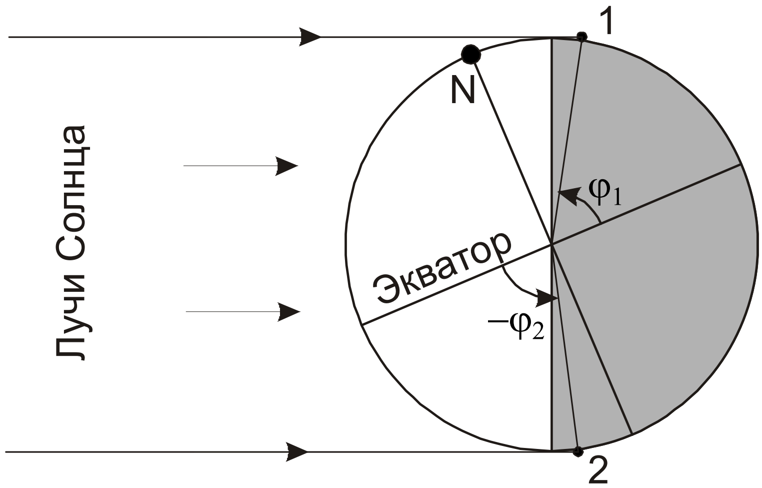
$$h = -90° + |\varphi_1 + \varepsilon|,$$

причем выражение под знаком модуля должно быть положительно, так как кульминация происходит на севере. Тогда мы имеем

$$\varphi_1 = 90° + h - \varepsilon = +63.4°.$$

Сумма склонения и широты очевидно больше нуля, поэтому мы получили одно из решений. Это положение самолета соответствует цифре 1 на рисунке. Но кульминация Солнца могла быть и верхней, и тогда

$$h = 90° - |\varepsilon - \varphi_2|,$$



причем выражение под модулем должно быть вновь положительным. Тогда

$$\varphi_2 = -90° + \varepsilon + h = -69.8°.$$

Выражение под знаком модуля вновь положительно, это положение самолета 2 на рисунке. Итак, мы имеем два возможных значения широты. Так как речь идет о Солнце, самолет должен компенсировать осевое вращение Земли относительно направления на Солнце с периодом T = 1 сутки. Для этого требуется скорость

$$v_{1,2} = \frac{2\pi R \cos\varphi_{1,2}}{T}.$$

Два возможных значения скорости составляют 207 и 160 м/с.

9.1. Система оценивания.

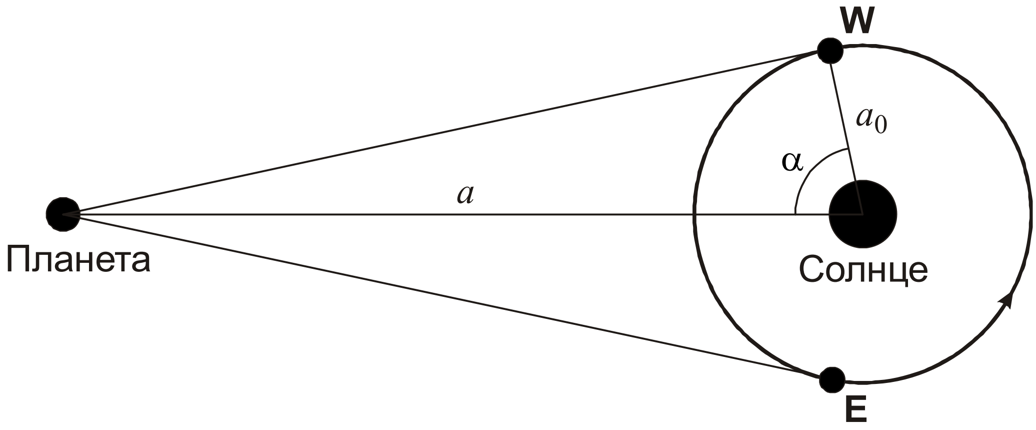
1 этап – 2 балла: учет эффекта понижения горизонта и вычисление его значения, по 1 баллу за каждое действие. Этап не засчитывается, и также уменьшаются оценки за последующие этапы, если эффект не учитывается в решении. Если величина понижения горизонта (3.2°) не вычисляется в явном виде, но правильно учитывается далее и приводит к верному ответу, этап засчитывается полностью.

2 этап – 2 балла: определение широты, на которой находился самолет. Выставляется по 1 баллу за каждое верное значение. Если не было учтено понижение горизонта, и в итоге получено значение широты полярного круга (с одним или двумя знаками) – за этап выставляется 1 балл при условии отсутствия иных ошибок.

3 этап – 4 балла: определение скорости самолета. 2 балла выставляется за использование правильной формулы и по 1 баллу – за каждое верное значение. Если не было учтено понижение горизонта, то для широты полярного круга должна быть определена скорость 184 м/с. В этом случае выставляется 2 балла за формулу и 1 балл за численное значение, то есть 3 балла за этап, если не сделано иных ошибок. Таким образом, все решение без учета понижения горизонта при правильном выполнении оценивается в 4 балла (0+1+3).

9.2. Условие. Между восточной квадратурой и последующей западной квадратурой некоторой планеты проходит в 1.143 раз больше времени, чем между ее западной и последующей восточной квадратурой. Что это за планета? Орбиты планет считать круговыми.

9.2. Решение. Квадратуры происходят только у внешних планет, обращающихся вокруг Солнца дальше Земли с большим, чем у Земли, периодом. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с планетой. В этой системе Земля будет также вращаться вокруг Солнца, но с несколько большим (синодическим) периодом. В промежуток между западной (точка **W**) и восточной (точка **E**) квадратурой Земля должна пройти дугу с углом 2α. Между восточной и западной квадратурой Земля проходит угол $2(\pi - \alpha)$. Поэтому



$$k = 1.143 = \frac{\pi - \alpha}{\alpha}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\pi}{1+k} = 1.465 \text{ рад} = 84^{\circ}.$$

С другой стороны, как видно из рисунка, радиус орбиты планеты есть

$$a = a_0/\cos\alpha \approx 9.6 \text{ а.е.}$$

Здесь a_0 – радиус орбиты Земли. Значит, эта планета – Сатурн.

9.2. Система оценивания.

<u>1 этап – 5 баллов:</u> вычисление угла α или эквивалентной для решения величины, что является ключевым моментом задачи. Этап можно выполнить как во вращающейся системе отсчета, так и в неподвижной, с учетом движения обеих планет. Ошибка на данном этапе не влияет на оценку за последующие этапы.

<u>2 этап – 2 балла:</u> нахождение радиуса орбиты планеты (1 балл – формула, 1 балл – вычисление).

<u>3 этап – 1 балл:</u> указание планеты. Выставляется только в случае правильного выполнения предыдущих этапов: если планета Сатурн указана без верного обоснования, балл не выставляется.

9.3. Условие. Космический аппарат стартует с Земли к некоторой звезде, двигаясь к ней относительно Солнца со скоростью 200 км/с. Годичный параллакс звезды равен 0.1″. Через какое время звезда при наблюдении с аппарата станет ярче на 0.1^m? Считать, что звезда неподвижна относительно Солнца, ее светимость постоянна.

9.3. Решение. Для начала нужно сразу отметить, что скорость аппарата (200 км/с) очень велика, и аппарат покинет Солнечную систему, не испытав на себе существенного тормозящего влияния Солнца. Поэтому мы можем считать, что аппарат движется прямолинейно с постоянной скоростью, направленной к звезде. Параллакс звезды равен 0.1″, то есть изначальное расстояние до нее r_0 равно 10 пк. Чтобы звезда стала на 0.1^m ярче, по формуле Погсона расстояние до нее должно составить

$$r = r_0 \cdot 10^{-0.2 \cdot 0.1} = r_0 \cdot 0.955.$$

Иными словами, аппарат должен пролететь расстояние $(r_0 - r)$ = 0.45 пк или $1.4 \cdot 10^{13}$ км в сторону звезды. Для этого ему потребуется время

$$T = \frac{r_0 - r}{v} = 2200 \text{ лет}.$$

9.3. Система оценивания. Указание, что притяжение Солнца практически не изменяет скорость аппарата, не является обязательным. Если участник упоминает это, либо правильно учитывает понижение скорости (примерно на 2%), оценка не изменяется. Если же делается неверный вывод о существенном изменении, оценка снижается. При изменении скорости более, чем на 10%, оценка уменьшается на 3 балла. Решение разделяется на следующие этапы:

1 этап – 2 балла: определение расстояния до звезды либо правильный учет выражения для него в расчетах. Выставляется только в случае правильного ответа или вычислений. В случае ошибок более, чем в 10 раз, вне зависимости от причин, все последующие этапы засчитываются наполовину.

2 этап – 4 балла: определение расстояния, которое должен преодолеть аппарат, чтобы звезда стала на 0.1^m ярче. Если участник олимпиады неверно использует формулу Погсона,

указывая в показателе степени 0.4 вместо 0.2 (то есть, считает яркость убывающей пропорционально первой степени расстояния), данный этап оценивается в 1 балл, остальные оцениваются в полной мере. Участник может также перепутать приближение к звезде с удалением и ее ослаблением на 0.1^{m}, что приведет практически к такому же значению расстояния (0.47 пк) и оценивается в 2 балла. При иных физических ошибках при выполнении этапа за него выставляется 0 баллов.

<u>3 этап – 2 балла:</u> нахождение требуемого времени. Необходимо правильно произвести перевод между различными единицами длины и времени. При ошибке более 20% этап полностью не засчитывается, при ошибке от 10% до 20%, вызванной арифметическими погрешностями, за этап выставляется 1 балл.

9.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение.

9.4. Решение. Угловое разрешение для невооруженного глаза человека с отличным зрением составляет примерно 1′. Предположим, что телескоп таков, что его дифракционный предел разрешения лучше 2″ – в дальнейшем мы сможем это проверить. Предел, который накладывает на разрешение спокойная атмосфера, также лучше – около 1″. Тогда мы можем заключить, что разрешение ограничено зрением наблюдателя, и тогда мы получаем, что увеличение телескопа M с тем окуляром, что используется в настоящий момент, составляет 30 крат.

Обозначим диаметр объектива как D, диаметр зрачка глаза как d. Пусть общее количество энергии, идущее через единичную площадку за единицу времени от участка неба, ограниченного полем зрения, составляет J. Тогда человеческий глаз за единицу времени примет с этого участка величину энергии $J \cdot \pi d^2$, а телескоп – $J \cdot \pi D^2$. Однако, в окуляре эта энергия будет распределена по увеличенной в M^2 раз площади. Из условия задачи имеем:

$$J\frac{\pi D^2}{M^2} = \frac{J \cdot \pi d^2}{2}.$$

Отсюда мы получаем величину диаметра объектива телескопа:

$$D = \frac{dM}{\sqrt{2}} = 17 \text{ см.}$$

Здесь диаметр зрачка d положен равным 8 мм. Если взять значение 6 мм, то диаметр объектива телескопа будет равен 12.7 см. Увеличение телескопа больше равнозрачкового (21 крат), и вся энергия, собираемая телескопом, попадает в глаз наблюдателя.

Нам также необходимо сделать проверку правильности предположения в начале решения. При диаметре объектива 12.7 см дифракционный предел разрешения составляет около 1″, при диаметре 17 см – еще лучше. Поэтому разрешающая способность действительно определялось зрением наблюдателя.

9.4. Система оценивания.

1 этап – 3 балла: определение увеличения телескопа. Для получения всех 3 баллов участник должен не просто вычислить его как отношение 1′/2″, но и указать, что другие факторы, ограничивающие разрешающую способность (дифракция, атмосферное дрожание) не играют роли. Без этого указания за первый этап выставляется только 1 балл. Если указание сделано, но несущественность дифракционного ограничения не проверена в конце решения – за этап ставится 2 балла. Правильное значение разрешающей способности глаза может быть взято в интервале от 0.8′ до 1.2′, Если участник задает разрешающую способность наблюдателя с отличным зрением хуже 1.2′, но не хуже 2′ – за этап снижается 1 балл, последующее решение оценивается в полной мере.

2 этап – 5 баллов: определение диаметра объектива телескопа. Этап можно выполнять также сравнивая увеличение с равнозрачковым, используя известный факт, что последнее не меняет поверхностную яркость протяженных объектов – доказательство этого факта не требуется. Значения диаметра зрачка глаза от 6 до 8 мм считаются правильными, при значениях от 4 до 6 мм и от 8 до 10 мм оценка снижается на 2 балла, при еще большей неточности за этап выставляется только 1 балл в случае правильных расчетов.

В качестве возможных ошибок при выполнении этапа участники могут предположить, что яркость протяженного объекта уменьшается пропорционально увеличению, а не его квадрату (в этом случае в итоговой формуле вместо увеличения будет стоять его квадратный корень). В этом случае этап оценивается в 2 балла, если не сделано иных ошибок. Участники могут вообще предположить, что увеличение не меняет поверхностную яркость, и получить диаметр объектива телескопа, меньший диаметра зрачка глаза. В этом случае этап не засчитывается полностью.

Участник олимпиады может также предположить, что разрешающая способность телескопа определяется только дифракцией, что при правильных расчетах даст диаметр объектива телескопа 7 см и увеличение 12 крат. В этом случае первый этап не засчитывается полностью, второй при правильных расчетах оценивается 4 баллами.

9.5. Условие. Две звезды сферической формы – белый карлик и нейтронная звезда (пульсар) – имеют одинаковые массы (1.2 массы Солнца) и радиусы 6000 и 10 км соответственно. Ускорение свободного падения на экваторе пульсара в 350 000 раз больше, чем на поверхности белого карлика. Найдите период вращения пульсара. Белый карлик не вращается, релятивистские эффекты не учитывать.

9.5. Решение. Ускорение свободного падения на экваторе звезды равно

$$g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R.$$

Как видно из этой формулы, оно уменьшается за счет осевого вращения звезды. Для белого карлика (радиус R) по условию задачи этого эффекта нет, но у нейтронной звезды с радиусом r он может играть заметную роль. Обозначим отношение ускорений свободного падения на экваторе у нейтронной звезды и белого карлика через K. Тогда

$$K = \frac{\dfrac{GM}{r^2} - \omega^2 r}{\dfrac{GM}{R^2}} = \frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\right).$$

Отношение R^2/r^2 равно 360 000, то есть центробежное ускорение на экваторе нейтронной звезды есть 1/36 от гравитационного. Тогда угловая скорость вращения нейтронной звезды равна

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}\left(1 - \frac{Kr^2}{R^2}\right)} = 2.1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

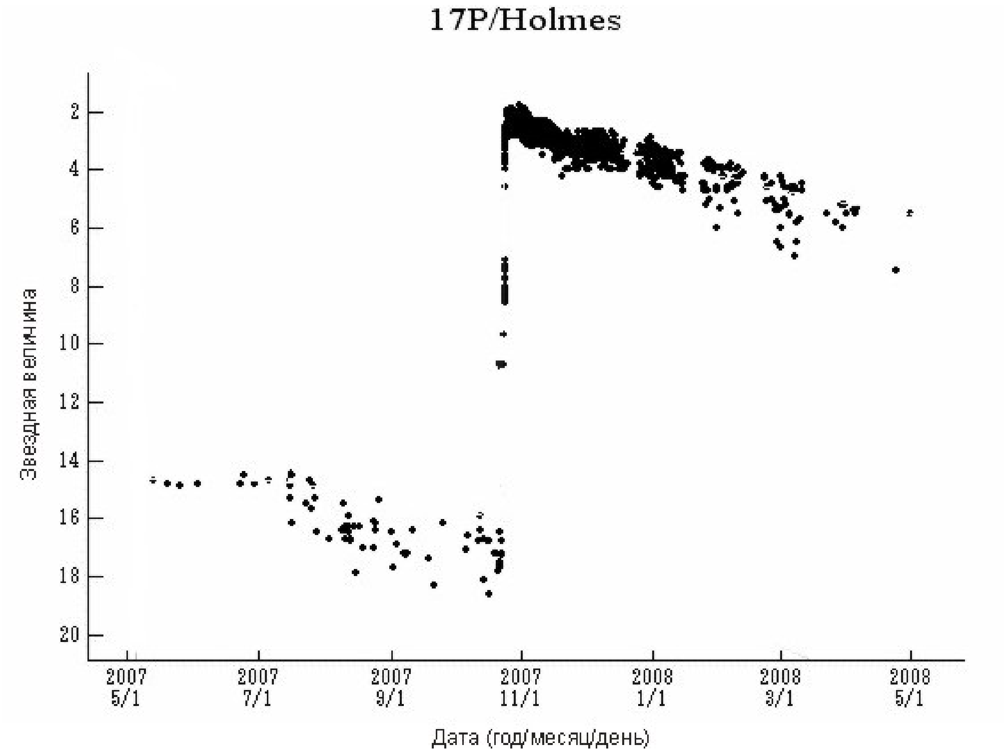
Период вращения T составляет $2\pi/\omega$, то есть 3 мс.

9.5. Система оценивания.

1 этап – 4 балла: правильная запись выражения для ускорения свободного падения на экваторе в явном виде либо через выражения для "центробежной силы". 1 балл выставляется за правильное выражение для белого карлика, 3 балла – за выражение для нейтронной звезды. Если в последнем случае не учитывается вращение, все 3 балла не выставляются.

2 этап – 4 балла: вычисление периода вращения пульсара. Вывод правильной формулы оценивается в 2 балла. Вычисление правильного ответа – еще в 2 балла. Если ответ отличается от данного в решении на 0.1 мс и более (по любой причине, в частности, из-за отсутствия учета отличия массы нейтронной звезды от солнечной), последние 2 балла не выставляются.

9.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е.



9.6. Решение. По графику мы видим, что звездная величина кометы Холмса прямо перед взрывом составляла 17^m, взрыв увеличил ее до 2^m, то есть на 15 звездных величин. В соответствии с формулой Погсона это означает, что комета стала ярче в K раз:

$$K = 10^{0.4\,(17-2)} = 10^6.$$

Мы считаем, что до взрыва комета представляла собой одно единое тело размером D и объемом V. Если это тело разобьется на N осколков, которые мы для простоты считаем одинаковыми, то каждый из них будет иметь средний объем V/N и размер $d=(V/N)^{1/3}=D\cdot N^{-1/3}$. Видимая яркость одного осколка j будет пропорциональна его видимой площади, то есть d^2. Суммарная яркость всех осколков составит

$$J \sim N\,d^2 = N\,D^2\,N^{-2/3} = N^{1/3}\,D^2 \sim N^{1/3}\,J_0.$$

Здесь J_0 – яркость монолитного ядра до взрыва. Получается, что для увеличения видимой яркости в K раз ядро должно разбиться на $N=K^3=10^{18}$ осколков. Необходимо отдельно оговорить, что размер кометного ядра вряд ли превосходит 10 км, поэтому средний осколок будет иметь размер 1 см и угловой размер с расстояния 1 а.е. порядка угловой микросекунды. При видимых размерах роя порядка нескольких минут 10^{18} частиц будут располагаться на угловых расстояниях порядка 0.5 миллисекунд дуги и практически не будут перекрывать друг друга.

Комета удалена от Земли на расстояние L, равное 1.6 а.е. Мы можем определить пространственный радиус комы через $\tau = 1$ неделю после взрыва: $R = L\ \delta/2 = 0.003$ а.е. = = 450 тыс.км. Так как взрыв был изотропным, кому можно считать сферической. Тогда концентрация осколков через неделю после взрыва равна

$$n_0 = 3N / 4\pi R^3 = 2.6\ \text{км}^{-3}.$$

9.6. Система оценивания. Решение задачи разбивается на четыре основных этапа, которые могут производиться в разной последовательности:

<u>1 этап – 2 балла:</u> определение величины усиления яркости кометы из графика (1 балл за определение звездных величин до и после вспышки, требуемая точность 0.5^m, 1 балл за применение формулы Погсона и определения соотношения яркостей). Если при решении допускается смысловая ошибка (например, непонимание шкалы звездных величин и ее связи с яркостью), то вне зависимости от ответа данный этап полностью не засчитывается.

<u>2 этап – 2 балла:</u> восстановление связи между величиной усиления яркости и количеством осколков кометного ядра, определение количества осколков. Участник олимпиады может брать данную связь как известную. При ошибочной связи (иной характер, нежели $J{\sim}N^{1/3}$) этап решения полностью не засчитывается. Если же ошибка настолько сильна, что связь оказывается обратной (яркость уменьшается при росте числа осколков) или очень резкой (яркость увеличивается как N или еще резче), итоговая оценка за все решение не может превышать 4 баллов.

<u>3 этап – 2 балла:</u> определение радиуса облака осколков через неделю после взрыва либо правильная запись выражения для него. Если участник путает видимый диаметр и радиус облака с ошибкой в размерах вдвое и итогового ответа – в 8 раз, данный этап не засчитывается, но последний засчитывается в полной мере.

<u>4 этап – 2 балла:</u> определение концентрации осколков. Допустимая точность выполнения (без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах) – 10%, для выставления 1 балла – 20%.. При ответе, отличающемся от правильного более, чем в 10 раз, вне зависимости от причин, итоговая оценка не может превышать 4 баллов.