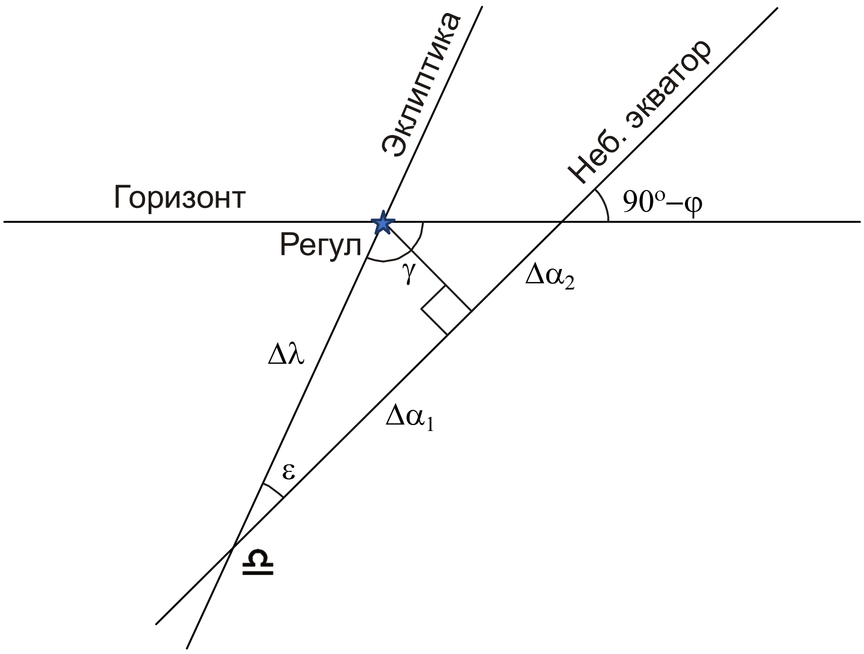
11 класс

11.1. Условие. Эклиптическая долгота Регула, ярчайшей звезды созвездия Льва, равна 150°, эклиптическая широта 0°. Определите среднее солнечное время его восхода 20 марта в Сочи (43.5° с. ш., 39.7° в. д.). Рефракцией, уравнением времени и рельефом местности пренебречь.

11.1. Решение. В день весеннего равноденствия точка осени восходит в $18^ч$ по местному времени. Построим чертёж, пренебрегая кривизной рассматриваемого участка небесной сферы:



Здесь ε – угол наклона эклиптики к земному экватору, φ – широта места наблюдения. Исходя из чертежа, можно сделать вывод, что Регул восходит раньше точки осеннего равноденствия благодаря двум факторам: прямое восхождение Регула меньше $12^ч$ (вдоль эклиптики он отстоит от точки осеннего равноденствия к западу на 2 часа), а его склонение положительно (следовательно, он восходит одновременно с точкой небесного экватора, имеющей меньшее, чему у звезды, прямое восхождение). Отсюда имеем:

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\lambda \cos\varepsilon;$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\Delta\lambda \sin\varepsilon}{\tan(90^\circ - \varphi)} = \Delta\lambda \sin\varepsilon \tan\varphi;$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = \Delta\lambda \frac{\cos\varepsilon \cos\varphi + \sin\varepsilon \sin\varphi}{\cos\varphi} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

Другой способ определить величину $\Delta\alpha$ состоит в рассмотрении треугольника, образованного Регулом, точкой осеннего равноденствия и точки востока (пересечения экватора с горизонтом). В этом треугольнике угол с вершиной в положении Регула равен

$$\gamma = (180° - (90° - \varphi) - \varepsilon) = 90° + \varphi - \varepsilon.$$

Применяя теорему синусов, получаем

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \frac{\sin\gamma}{\sin(90^{\circ} - \varphi)} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

В результате имеем разницу во времени восхода в 2ч35м *звездного* времени, что, впрочем, в пределах погрешности расчетов совпадает и с разницей по *солнечному* времени. Восход Регула произойдет в 15ч25м по среднему солнечному времени.

11.1. Система оценивания. Приведенный выше способ решения не является единственным. Задание можно решить напрямую, используя формулы сферической тригонометрии. В этом случае ответ составляет около 15ч20м, правильное решение засчитывать полностью (8 баллов). В случае ошибок в записи самих формул максимальная оценка за все решение не превышает 4 баллов, при ошибках вычисления при правильных формулах оценка не превышает 6 баллов. Решение, описанное выше, разделяется на этапы:

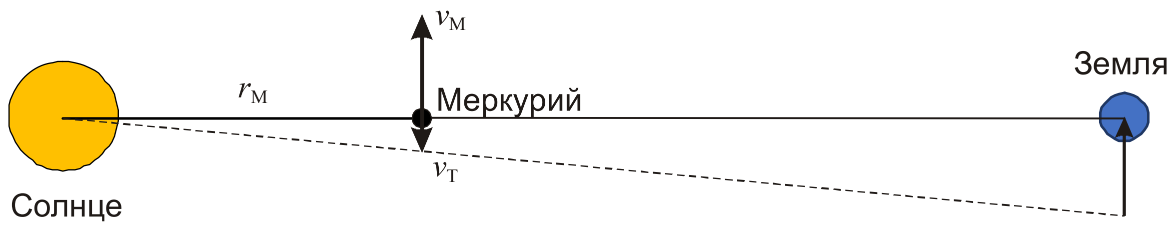
<u>1 этап – 2 балла:</u> правильное представление взаимного расположения горизонта, экватора и эклиптики, выраженные рисунком или формулами (1 балл – расположение экватора относительно горизонта, 1 балл – расположение эклиптики относительно экватора и/или горизонта, значение эклиптической долготы опорной точки, в решении выше – точки осеннего равноденствия).

<u>2 этап – 4 балла:</u> построение методики определения разницы прямых восхождений Регула и точки осеннего равноденствия или иной величины, позволяющей определить время восхода. Возможны разные способы решения треугольника, два из них описаны выше. При неправильном построении метода этап не засчитывается.

3 этап – 2 балла: вычисление времени восхода Регула. Выставляются при верной методике. Требуемая точность – 10 минут, при ошибке до 20 минут за этап выставляется 1 балл.

11.2. Условие. 11 ноября 2019 года произошло прохождение Меркурия по диску Солнца, в ходе которого внутренняя планета прошла на небе практически через центр диска звезды. Считая, что это прохождение было в точности центральным, а Меркурий находился в перигелии своей орбиты, оцените, сколько солнечной энергии (в джоулях) недополучила Земля в связи с этим событием. Альбедо Земли не учитывать.

11.2. Решение. «Заморозим» движение Земли вокруг Солнца, перейдя в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца с угловой скоростью, равной орбитальной угловой скорости Земли, систему отсчета.



В этой системе из орбитальной скорости Меркурия в перигелии (a_M – большая полуось орбиты планеты, e – эксцентриситет, r_M – перигелийное расстояние Меркурия)

$$v_M = \sqrt{\frac{GM}{a_M}\frac{1+e}{1-e}} = 59.03 \text{ км/с}$$

вычитается поправка, связанная с вращением системы отсчета

$$v_T = r_M\omega_0 = a_M(1-e)\cdot\frac{2\pi}{T_0} = 9.15 \text{ км/с}.$$

Здесь ω_0 и T_0 – угловая скорость и период обращения Земли. Чтобы пересечь диск Солнца в небе Земли, Меркурий, находящийся ближе к нам, должен пройти в пространстве его диаметр, умноженный на отношение $(a_0 - r_M)/a_0$. Для этого потребуется время

$$T = \frac{2R_S}{v_M - v_T}\cdot\frac{a_0 - r_M}{a_0} = 1.93\cdot 10^4 \text{ с} = 5.37 \text{ ч}.$$

Здесь R_S – радиус Солнца. Относительное падение освещённости на Земле, обусловленное тем, что Меркурий закрывает часть видимой солнечной поверхности, равно отношению видимых угловых площадей Меркурия и Солнца:

$$K = \pi\left(\frac{R_M}{a_0 - r_M}\right)^2 \Bigg/ \pi\left(\frac{R_S}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{R_M}{R_S}\cdot\frac{a_0}{a_0 - r_M}\right)^2 = 2.6\cdot 10^{-5}.$$

При обычной своей освещенности Солнцем (солнечная постоянная A_0 = 1360 Дж/м^{2}с) Земля за время прохождения «потеряет»

$$Q = T\cdot K\cdot A_0\cdot\pi R_0^2 = 9\cdot 10^{16}\text{ Дж}.$$

Здесь R_0 – радиус Земли.

11.2. Система оценивания.

<u>1 этап – 5 баллов:</u> определение длительности прохождения Меркурия по диску Солнца. Может выполняться как в неподвижной, так и во вращающейся вместе с Землей системе отсчета. При решении могут быть допущены следующие ошибки:

1) Длительность прохождения Меркурия берется как известная, в частности, на примере прохождения 11 ноября 2019 года (5.5 часов). Это противоречит условию задачи (центральное прохождение в перигелии орбиты), поэтому этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.

2) Не учтен эксцентриситет орбиты Меркурия. В случае круговой орбиты длительность явления составила бы 6.5 часов. То же самое, если он учтен, но с другим знаком (Меркурий оказывается в афелии орбиты), и тогда длительность превышает 8 часов. В этих случаях первый этап при отсутствии иных ошибок оценивается в 3 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.

3) Не учтено движение Земли, в этом случае длительность прохождения оказывается меньшей, около 4.5 часов. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.

4) При расчете длительности прохождения считается, что Меркурий должен пройти путь, равный диаметру Солнца, что увеличивает длительность до 7 часов. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.

5) При одновременном появлении любых двух ошибок из перечисленных выше этап не засчитывается полностью (0 баллов).

2 этап – 3 балла: нахождение дефицита солнечной энергии. При выполнении этапа участник может принять, что соотношение видимых диаметров Меркурия и Солнца такое же, как соотношение их пространственных диаметров (не учитывая приближение Меркурия к Земле). Это допущение примерно вдвое уменьшает искомый эффект, за 2 этап выставляется не более 1 балла. Если же приближение учитывается, но с использованием среднего или афелийного расстояния Меркурия от Солнца (ответ в этом случае увеличивается на 20% и 40% соответственно), за этап выставляется не более 2 баллов.

Участники олимпиады могут предположить, что Меркурий задержит часть солнечной энергии, равную отношению видимых диаметров Меркурия и Солнца в первой степени. В этом случае второй этап решения не засчитывается (0 баллов).

11.3. Условие. Астероид сферической формы, принадлежащий Солнечной системе, ударился в Землю с максимально возможной скоростью, а перед этим в течение суток он был виден в небе Земли невооруженным глазом. Считая грунт астероида аналогичным лунному, определите радиус астероида.

11.3. Решение. Коль скоро астероид принадлежит Солнечной системе, его гелиоцентрическая скорость вблизи Земли не могла превышать параболическую скорость $v\sqrt{2}$ = 42.1 км/с. Здесь v – круговая скорость на орбите Земли, равная 29.8 км/с. Считая орбиту Земли круговой, мы получаем, что максимальная скорость соударения Земли и астероида (встречного) составляет

$$u = v(\sqrt{2}+1) = 71.9 \text{ км/с}.$$

В течение суток траектории Земли и астероида можно считать прямыми линиями. Обозначив этот период времени как t, определяем расстояние между Землей и астероидом за сутки до столкновения L = ut = 6.21 млн км. Обратим внимание, что за сутки до удара астероид располагался на том же расстоянии от Солнца, а в небе Земли располагался в 90° от Солнца с западной стороны – только при таком положении возможно его столкновение с Землей с максимальной относительной скоростью. Поэтому по условиям освещения Солнцем и отражения света к Земле он не отличался от Луны в последней четверти. Последняя, как известно из справочных данных, имеет блеск m_0=–10. Астероид же в это время был на пределе видимости невооруженным глазом, его звездная величина составляла m=6.

Видимая яркость астероида и Луны различается из-за их разных размеров и расстояния до Земли, остальные характеристики одинаковы. Тогда по формуле Погсона:

$$m - m_0 = 2.5\lg\frac{R^2L^2}{r^2L_0^2} = 5\lg\frac{RL}{rL_0}.$$

Здесь L_0 – расстояние от Луны до Земли, R – радиус Луны. В итоге, получаем значение радиуса астероида:

$$r = R\frac{L}{L_0}10^{-0.2(m-m_0)} = 17 \text{ км.}$$

Описанная в условии ситуация представляла бы колоссальную опасность для дальнейшего существования земной цивилизации. Тем не менее, такой астероид был бы виден глазом в небе Земли только в последние сутки перед столкновением.

11.3. Система оценивания.

<u>1 этап (3 балла):</u> определение максимальной скорости удара астероида. Она может быть взята как известная, что также засчитывается. Если участник вместо нее берет гелиоцентрическую скорость (42 км/с), встречную круговую скорость (около 60 км/с) или скорость догоняющего астероида (12 км/с), этап полностью не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере. Участникам не нужно учитывать увеличение геоцентрической скорости астероида из-за притяжения Земли, так как оно скажется только непосредственно перед ударом и даже там будет меньше 1 км/с. Если ускорение астероида анализируется и делается вывод о его несущественности, оценка не изменяется. Если же увеличенная на 1 км/с скорость предполагается для движения астероида за все предшествующие сутки, оценка снижается на 2 балла.

<u>2 этап (1 балл):</u> правильное определение расстояния до астероида за сутки до столкновения в виде числового ответа или формулы, если подстановка чисел происходит только на последнем этапе, из которой ясно следует правильность вычислений.

3 этап (4 балла): вычисление радиуса астероида. Если участники олимпиады не учитывают фазовый эффект и сравнивают астероид с полной Луной, получая при правильных вычислениях ответ около 5 км, этот этап оценивается в 2 балла. Если фаза учитывается, но как двукратное уменьшение яркости астероида, что приводит к ответу 14 км, за этап выставляется не более 3 баллов.

При ошибочном применении формулы Погсона, в частности, уменьшение коэффициента вдвое, что соответствует убыванию яркости пропорционально первой степени расстояния, оценка за 3 этап не превышает 1 балл. То же самое относится, если яркость объекта пропорциональна первой степени радиуса объекта. При одновременно появлении любых двух из описанных выше ошибок этап полностью не засчитывается.

11.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение.

11.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

11.5. Условие. Черные шары с одинаковой плотностью 1 г/см^3 и радиусами 50 и 100 мкм запущены со скоростью 29.8 км/с (круговой скоростью движения Земли) в одинаковом направлении перпендикулярно направлению на Солнце на расстоянии 1 а.е. от него. Каким будет расстояние между этими шарами через 1 год? Взаимодействие шаров с планетами и друг с другом не учитывать.

11.5. Решение. Как мы видим, скорость шаров равна круговой (первой космической) скорости для данного расстояния от Солнца. Их орбита была бы круговой, если бы на них действовало только притяжение Солнца. Однако, размеры шаров невелики, и заметное влияние на их движение может оказывать сила светового давления. Каждый фотон солнечного излучения передает черному шару свой импульс, который равен E/c, где E – энергия фотона, а c – скорость света. Таким образом, если через единичную площадь за единицу времени проходит количество солнечной энергии, равное I, то все эти фотоны будут иметь суммарный импульс, равный I/c. Сила давления солнечного излучения на черный шар радиусом r, удаленный от Солнца на расстояние L, составит

$$F_{\nu} = \frac{J \cdot \pi r^2}{4\pi L^2 c} = \frac{J r^2}{4L^2 c}.$$

Здесь J – светимость Солнца, L – расстояние от Солнца до шара. В то же время, гравитационное воздействие от Солнца на шар составляет:

$$F_{\mathrm{G}} = -\frac{GM}{L^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \cdot \rho}{3}.$$

Здесь M – масса Солнца, ρ – плотность шара. Знак "–" указывает на то, что гравитационное действие противоположно световому по направлению. Равнодействующая сил притяжения и светового давления составит

$$F = F_{\mathrm{G}} + F_{\nu} = -\frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} + \frac{J r^2}{4L^2 c} = -\frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} \cdot \left(1 - \frac{3J}{16\pi GM\rho c r}\right) = -\frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2}(1 - K).$$

Здесь K – величина отношения модулей светового и гравитационного действия:

$$K = \left|\frac{F_{\nu}}{F_{\mathrm{G}}}\right| = \frac{3J}{16\pi GM\rho c r} = \frac{r_0}{r}.$$

Это отношение не зависит от расстояния от Солнца до шара и оказывается равным единице при радиусе r_0=0.58 мкм. Наши две частицы имеют большие радиусы, и для них величина светового давления составит 1.16% и 0.58% от гравитационного соответственно. Их движение можно описать как движение в чисто гравитационном поле, но с уменьшенной массой $M^* = M \cdot (1-K)$. Очевидно, что скорость частиц v, равная круговой скорости для полной массы Солнца, здесь будет больше круговой, и движение будет происходить по эллипсу, для которого точка запуска будет точкой перигелия:

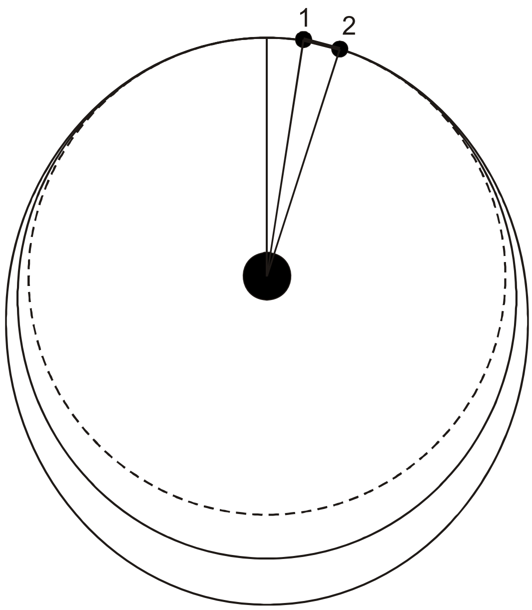
$$v^2 = \frac{GM}{L} = \frac{GM(1-K)}{L}(1+e).$$

Отсюда мы получаем выражение для эксцентриситета:

$$e = \frac{K}{1-K}.$$

Поскольку точка запуска является точкой перигелия, можно записать $a_0 = a\ (1-e)$, откуда большая полуось орбиты в астрономических единицах составит $a/a_0 = 1/(1-e)$. Период обращения в годах мы можем определить из III закона Кеплера с учетом изменившейся массы:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{(1-e)^3(1-K)}} = \sqrt{\frac{(1-K)^3}{(1-2K)^3(1-K)}} = \frac{1-K}{\sqrt{(1-2K)^3}} \approx 1+2K.$$



В итоге, через один год (время T_0) частица не завершит свой оборот, для этого ей еще потребуется время

$$t = T - T_0 = 2KT_0 = \frac{2T_0 r_0}{r}.$$

Расстояние между шарами составит

$$d = v(t_1 - t_2) = 2vT_0 r_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 4\pi r_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \text{ а.е.} = 0.073 \text{ а.е.}$$

Отметим, что если бы мы произвели вычисления без приближений в последних трех формулах, мы бы получили ответ 0.076 а.е.

Нам нужно оговориться, что на движение пылинок будет влиять также эффект Пойнтинга-Робертсона, связанный с тем, что в системе отсчета движущейся пылинки световое давление будет направлено не от Солнца, а под малым углом $\gamma = v_0/c$ к этому направлению. В итоге, солнечное излучение создаст тормозящую силу, равную

$$F_{\mathrm{PR}} = -F_{\mathrm{v}}\gamma = -\frac{J\,r^2 v_0}{4L^2c^2}.$$

Можно показать, что это приведет к приближению пылинки к Солнцу. За один оборот это приближение ΔL будет равно

$$\Delta L = -L\cdot\frac{3J\,v_0}{16GMc^2\rho r} = -L\frac{\pi\,v_0 r_0}{cr}.$$

Это смещение по порядку величины есть (v_0/c) от расстояния вдоль орбиты, определенного ранее. Для рассматриваемых в этой задаче пылинок смещение к Солнцу за один оборот составит менее 10^{-5} а.е. и роли не играет.

11.5. Система оценивания.

<u>1 этап (2 балла):</u> Вычисление, насколько изменится эффективная сила притяжения к Солнцу за счет светового давления для заданных двух частиц. Возможно использование записи формул в общем виде или ввода величины радиуса, для которого световое давление полностью компенсирует гравитацию, r_0, что упрощает все выкладки. Точность величины r_0 или соотношения силы светового давления и гравитации – 10%. При больших ошибках данные 2 балла не выставляются, если же сами выкладки производились из неверных соображений, неправильно учитывающих физику процесса – оценка за дальнейшие этапы не превышает 50% от максимума.

<u>2 этап (4 балла):</u> Определение периода обращения каждой из пылинок и/или расстояния от исходной точки, на которой она окажется через год. Необходимо отметить, что период обращения увеличивается за счет двух факторов: эллиптической орбиты (увеличение большой полуоси в III законе Кеплера) и уменьшения массы (также входящей в III закон Кеплера). Если участник принимает во внимание только один из факторов, то итоговое расстояние уменьшается на 25% или 75% в зависимости от учтенного фактора. В этом случае оценка за данный этап уменьшается до 2 баллов, при этом выполнение последнего этапа оценивается не выше 1 балла. Вычисления можно производить приближенно, как описано

выше, и точно, разница в ответе составляет около 5%. Требуемая точность вычислений – 10%, при ошибке до 20% оценка за этап уменьшается на 2 балла.

3 этап (2 балла): Вычисление правильного расстояния между пылинками. Оценивается полностью только в случае верного выполнения предыдущих этапов задания.

Упоминание эффекта Пойнтинга-Робертсона в решении не является обязательным. Если он оценен верно, и сделан вывод о его несущественности, это не влияет на оценку. В случае ошибочного утверждения об его принципиальности оценка уменьшается в зависимости от полученной степени вклада этого эффекта. При выводе о сопоставимости смещения частиц за счет эллиптичности орбит и эффекта Пойнтинга-Робертсона оценка уменьшается вдвое.

11.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е.

11.6. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.6.