

10 класс

10.1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q - 1)^2$ составное.

Решение. Пусть a и b – корни данного уравнения. Тогда, используя теорему Виета, получим: $p^2 + (q - 1)^2 = (a + b)^2 + (ab - 1)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2ab + 1 = (a^2 + 1) + (b^2 + a^2b^2) = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$. Так как $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a^2 + 1 \neq 1$ и $b^2 + 1 \neq 1$. Следовательно, число $p^2 + (q - 1)^2$ составное.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Верно выполнено разложение на множители, но не объяснено, что они отличны от единицы

«-» Задача не решена или решена неверно

10.2. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

Ответ: можно.

Решение. Разделим квадрат на два равных прямоугольника размером 4×8 . Диагональ такого прямоугольника равна $\sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} < 9$. Следовательно, каждый из полученных прямоугольников можно покрыть описанным около него кругом, диаметр которого равен длине диагонали прямоугольника. Значит, и кругом с диаметром 9 такой прямоугольник покрыть можно. Тогда данный квадрат можно покрыть двумя кругами диаметра 9.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведён чертеж разбиения данного квадрата на два прямоугольника и покрытия их равными кругами, но вычисления отсутствуют

«-» Задача не решена или решена неверно

10.3. Пусть n – натуральное число. Какая цифра стоит сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2 + n}$?

Ответ: 4.

Решение. Докажем, что $(n + 0,4)^2 < n^2 + n < (n + 0,5)^2$, откуда и будет следовать указанный ответ. Действительно:

1) $(n + 0,4)^2 < n^2 + n \Leftrightarrow 0,8n + 0,16 < n \Leftrightarrow n > 0,8$. Последнее неравенство верно для любого натурального n .

2) $n^2 + n < (n + 0,5)^2 \Leftrightarrow n < n + 0,25$, а это очевидно.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведён верный ответ, но доказано только одно из двух требуемых неравенств

«-» Верный ответ получен рассмотрением конкретных примеров

«-» Приведён только ответ

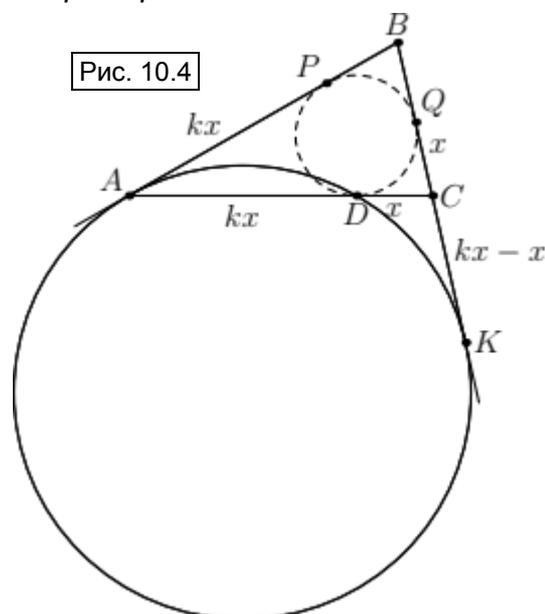
«-» Задача не решена или решена неверно

10.4. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D . Вторая окружность проходит через точку D , касается луча BA в точке A и, кроме того, касается продолжения стороны BC за точку C . Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: 3 : 1.

Решение. Пусть вторая окружность касается луча BC в точке K , а вписанная окружность касается сторон AB и BC треугольника в точках P и Q соответственно (см. рис. 10.4). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть $CD = CQ = x$ и $AD = AP = kx$. Так как $BA = BK$ и $BP = BQ$, то $PA = QK$, откуда $CK = kx - x$. По теореме о касательной и секущей: $CD \cdot CA$



$= CK^2$, то есть $x(x + kx) = (kx - x)^2$. Разделив обе части этого равенства на x^2 , раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $k^2 = 3k$, то есть $k = 3$.

Второй способ. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда $CD = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$, $CK = BK - BC = AB - BC = c - a$. По теореме о касательной и секущей: $CD \cdot CA = CK^2$, то есть $\frac{a+b-c}{2} \cdot b = (c-a)^2 \Leftrightarrow b^2 - (c-a)b - 2(c-a)^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b , получим: $b = a - c$ или $b = 2(c - a)$.

Равенство $b = a - c$ противоречит неравенству треугольника, а если $b = 2(c - a)$, то $\frac{AD}{DC} = \frac{b+c-a}{2} : \frac{a+b-c}{2} = \frac{3c-3a}{c-a} = 3$.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ

«±» Верно и обоснованно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка

«-» Приведён только ответ

«-» Задача не решена или решена неверно

10.5. У царя восемь сыновей, и все дураки. Каждую ночь царь отправляет троих из них стеречь золотые яблоки от жар-птицы. Поймать жар-птицу царевичи не могут, винят в этом друг друга, и поэтому никакие двое не соглашаются пойти вместе в караул второй раз. Какое наибольшее количество ночей это может продолжаться?

Ответ: 8 ночей.

Решение. Оценка. Рассмотрим любого из сыновей. В каждом карауле он находится вместе с двумя братьями, поэтому после трёх его выходов останется один брат, вместе с которым он не ходил в караул, и уже не сможет пойти, так для них не будет третьего. Эта ситуация «симметрична», то есть если сын А после трёх своих выходов не ходил в караул с сыном В, то и сын В после трёх своих выходов не ходил в караул с сыном А. Следовательно, есть как минимум четыре пары сыновей, которые в одном карауле не были и не будут. Всевозможных пар: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, поэтому в караулах побывают не более чем $28 - 4 = 24$ пары. Так как за одну ночь задействованы по три пары сыновей, то ночей может быть не больше чем $24 : 3 = 8$.

Пример. Обозначим сыновей: 1, 2, 3, 4, А, В, С, D. Тогда восемь троек, удовлетворяющих условию задачи: А12, В23, С34, D41, АВ4, ВС1, CD2, DA3.

Можно также привести пример в виде картинку (см. рис. 10.5). Восемь сыновей обозначены точками, восемь троек, удовлетворяющих условию задачи – линиями.

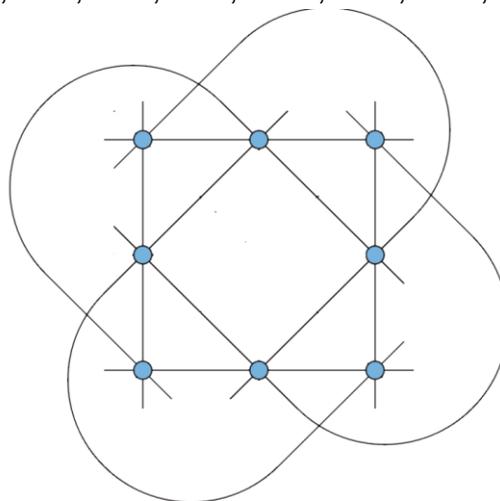


Рис. 10.5

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ

«±» Приведены верный ответ и верная оценка, но пример отсутствует или неверен

«±» Приведены верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна

«±» Приведены верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна

«–» *Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

10.6. Петя разложил карточки с числами от 1 до 10 в ряд в каком-то порядке, затем для каждой пары соседних карточек записал число $\frac{1}{x+y}$, где x и y – числа на этих карточках.

Докажите, что сумма записанных Петей чисел больше, чем 0,75.

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим, которое выполняется для любых наборов положительных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Пусть a_1, a_2, \dots, a_9 – суммы чисел на соседних карточках, тогда, используя это неравенство, получим: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_9} \geq \frac{9^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_9}$. Левая часть этого неравенства –

это и есть сумма чисел, записанных Петей. Сумма чисел в знаменателе правой части равна $2(1 + 2 + \dots + 9 + 10) - (p + q) = 110 - (p + q)$, где p и q – числа, записанные на крайних карточках. Их наименьшая сумма равна 3 (когда это 1 и 2). В этом случае правая

часть неравенства принимает наименьшее значение, поэтому $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_9} \geq \frac{9^2}{110-3} >$

$\frac{81}{110-2} = \frac{3}{4}$, что и требовалось.

От школьников не требуется доказывать неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«–» *Рассмотрены только любые частные случаи или проведены только какие-то нестрогие рассуждения*

«–» *Задача не решена или решена неверно*