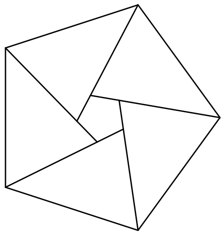
10 класс

Задача 1. Разрежьте правильный пятиугольник на пять равных треугольников и один правильный пятиугольник меньшего размера.

Решение. Проведём лучи из вершин пятиугольника под равными углами со смежными с ними сторонами, как на рисунке. Каждый луч доведём до пересечения со следующим лучом.



□

Критерии

0 б. Любое разрезание, не удовлетворяющее хотя бы одному из условий.

4 б. Любое разрезание, удовлетворяющее всем условиям.

Задача 2. Вычислите:

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{2017+2018}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right).$$

Ответ: 1346.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{2017+2018}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)=$$

$$=\left(\frac{(3-2)+(3-1)}{3}+\frac{(6-2)+(6-1)}{6}+\frac{(9-2)+(9-1)}{9}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(2019-2)+(2019-1)}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)=$$

$$=\left(\frac{(3+3)-(2+1)}{3}+\frac{(6+6)-(2+1)}{6}+\frac{(9+9)-(2+1)}{9}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(2019+2019)-(2+1)}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)=$$

$$=\left(2-\frac{3}{3}+2-\frac{3}{6}+2-\frac{3}{9}+\ldots+2-\frac{3}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)=$$

$$=2\cdot 673-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right)=$$

$$=2\cdot 673=1346\,.$$

□

Критерии

1 б. Только правильный ответ без доказательства.

2 б. С помощью верных алгебраических выкладок удалось избавиться от сумм с многоточиями, но допущена арифметическая ошибка.

4 б. Любое полное верное решение.

Задача 3. Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 мешков (чтобы в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Ответ: нет.

Решение. Предположим противное: пусть карточки можно разложить по одиннадцати мешкам так, чтобы выполнялось условие.

Для того чтобы произведение чисел на карточках в некотором мешке делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий:

- среди чисел на карточках в этом мешке есть хотя бы одно, кратное 9;
- среди чисел на карточках в этом мешке есть хотя бы два, кратных 3.

Из чисел от 1 до 50 ровно пять кратны 9 (это числа 9, 18, 27, 36, 45). Значит, хотя бы шесть мешков не содержат чисел, кратных 9. Эти мешки должны содержать как минимум по два числа, кратных 3, но не кратных 9. Тогда всего чисел, кратных 3, но не кратных 9, должно быть не менее 12. Но в промежутке от 1 до 50 ровно 11 таких чисел (3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48). Противоречие. □

Критерии

0 б. Только ответ без доказательства.

1 б. В работе присутствует наблюдение, что среди чисел в мешке должно быть одно, кратное 9, или два, кратных 3, но дальнейших продвижений нет.

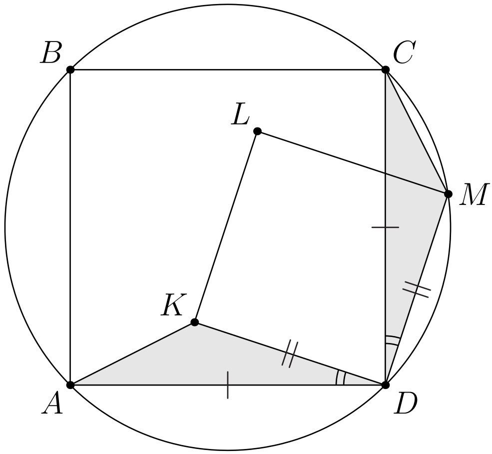
3 б. Идейно верное решение, неправильно построенное логически. Приведём эскиз такой потенциальной работы: «Чисел, кратных 9, ровно 5, их кладём в 5 мешков; остальных чисел, кратных 3, ровно 11, кладём их в 5 мешков по два, и ещё одно число осталось. Итого 10 мешков, а надо 11. Значит, нельзя».
Правильно логически построенное решение должно приводить к противоречию любой потенциально возможный способ разложить числа; неправильно построенное решение опирается на конкретный способ раскладывать карточки по мешкам, который по каким-то причинам кажется автору оптимальным.

4 б. Любое полное верное решение.

Задача 4. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность ω. На меньшей дуге CD окружности ω выбрана произвольная точка M. Внутри квадрата отмечены такие точки K и L, что $KLMD$ — квадрат. Найдите $\angle AKD$.

Ответ: $135°$.

Решение.



Докажем равенство треугольников DAK и DCM. Проверим, что выполнены условия первого признака равенства треугольников. Отрезки DA и DC равны как стороны квадрата $ABCD$, отрезки DK и DM равны как стороны квадрата $KLMD$. Далее, поскольку углы ADC и KDM исходных квадратов прямые, можно записать

$$\angle ADK = 90° - \angle KDC = \angle CDM\,.$$

Таким образом, треугольники DAK и DCM действительно равны. Следовательно, $\angle AKD = \angle CMD$. Но $\angle CMD = 135°$, так как он вписанный и опирается на дугу $DABC$ окружности ω, а мера этой дуги равна $270°$. Тогда $\angle AKD = 135°$, что и требовалось найти. □

Критерии

0 б. Любое незаконченное или ошибочное счётное решение.

1 б. Только правильный ответ без доказательства.

1 б. В работе упомянуто возможное равенство треугольников DAK и DCM, но не доказано или неправильно доказано; дальнейших продвижений нет.

2 б. В работе упомянуто возможное равенство треугольников DAK и DCM, но не доказано или неправильно доказано; далее решение закончено и получен правильный ответ.

2 б. Доказано равенство треугольников DAK и DCM, но угол AKD не найден или вычислен ошибочно.

4 б. Любое полное верное решение.

Задача 5. Дано положительное число a. Известно, что уравнение $x^3 + 1 = ax$ имеет ровно два положительных корня, и отношение большего из них к меньшему равно 2018. Уравнение $x^3+1=ax^2$ также имеет ровно два положительных корня. Докажите, что отношение большего из них к меньшему также равно 2018.

Решение. Обозначим положительные корни уравнения $x^3+1=ax$ через x_1 и x_2 ($0<x_1<x_2$, $x_2:x_1=2018$). Подставим их в уравнение и поделим два получившихся равенства на x_1^3 и на x_2^3:

$$x_1^3+1=ax_1 \Longleftrightarrow 1+\left(\frac{1}{x_1}\right)^3=a\left(\frac{1}{x_1}\right)^2;$$

$$x_2^3+1=ax_2 \Longleftrightarrow 1+\left(\frac{1}{x_2}\right)^3=a\left(\frac{1}{x_2}\right)^2.$$

Из формул видно, что $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$ — положительные корни уравнения $x^3+1=ax^2$. По условию их ровно два, и надо найти отношение большего к меньшему. Ясно, что $\dfrac{1}{x_2}<\dfrac{1}{x_1}$. Тогда $\dfrac{1}{x_1}:\dfrac{1}{x_2}=x_2:x_1=2018$. □

Критерии

2 б. В работе отмечен тот факт, что при делении первого уравнения из условия на x^3 и последующей замены $\frac{1}{x}\to x$ первое уравнение переходит во второе, но никаких дальнейших продвижений нет.

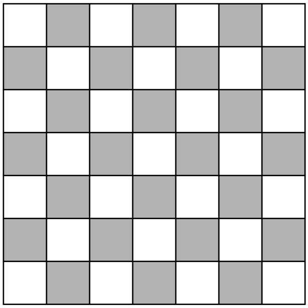
3 б. В работе доказано, что второе уравнение имеет положительные корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, но отношение большего к меньшему найдено ошибочно (к примеру, перепутаны больший и меньший).

4 б. Любое полное верное решение.

Задача 6. Пятачок и Винни-Пух решили съесть квадратную шоколадку 7×7. Они поочерёдно по клеточкам выедают из неё кусочки: Пятачок — 1×1, Винни-Пух — 2×1 или 1×2 (кусочки можно выедать не обязательно с краю). Первый ход делает Пятачок. Если перед ходом Винни-Пуха в шоколадке не осталось ни одного кусочка 2×1 или 1×2, то вся оставшаяся шоколадка достаётся Пятачку. Кто из друзей сможет съесть больше половины всей шоколадки вне зависимости от действий второго?

Ответ: Пятачок.

Решение. Раскрасим мысленно все клетки шоколадки в два цвета в шахматном порядке. Получится 24 чёрные клетки и 25 белых клеток.



Опишем явно одну из возможных стратегий Пятачка. На каждом ходу Пятачок будет выедать какую-нибудь чёрную клетку. Заметим, что Винни-Пух каждым своим ходом съедает ровно одну чёрную клетку (и ровно одну белую). Таким образом, после первых 12 пар ходов все чёрные клетки закончатся, Винни-Пух больше не сможет ходить и вся оставшаяся шоколадка достанется Пятачку. Всего за первые 12 своих ходов Винни-Пух съест не более 24 клеток, что меньше половины всей шоколадки, и больше он ничего не съест. Следовательно, Пятачок, придерживаясь приведённой стратегии, съест больше половины шоколадки. □

Критерии

0 б. Только правильный ответ.

0 б. Дана стратегия Пятачка, которая работает только против одной или нескольких возможных стратегий Винни-Пуха. Обычно в таких работах необоснованно полагают, что какие-то ходы Винни-Пуха «выгоднее» других, и рассматривают только «выгодные» ходы. Сюда же относятся работы с неполнотой перебора возможных действий Винни-Пуха.

1 б. В работе присутствует идея шахматной раскраски шоколадки, но дальнейших продвижений нет.

2 б. В работе описана правильная стратегия Пятачка, которая на самом деле работает против любых возможных действий Вини-Пуха, но обоснования нет вовсе или в обосновании рассматриваются только одна или нескольких возможных стратегий Винни-Пуха.

4 б. Любое полное верное решение. Типичное решение должно содержать описание стратегии Пятачка и обоснование, почему приведённая стратегия работает против любых возможных действий Винни-Пуха.