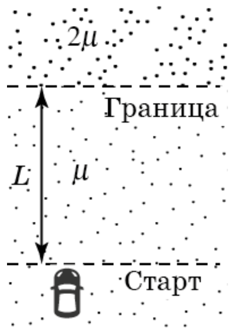
11 класс.

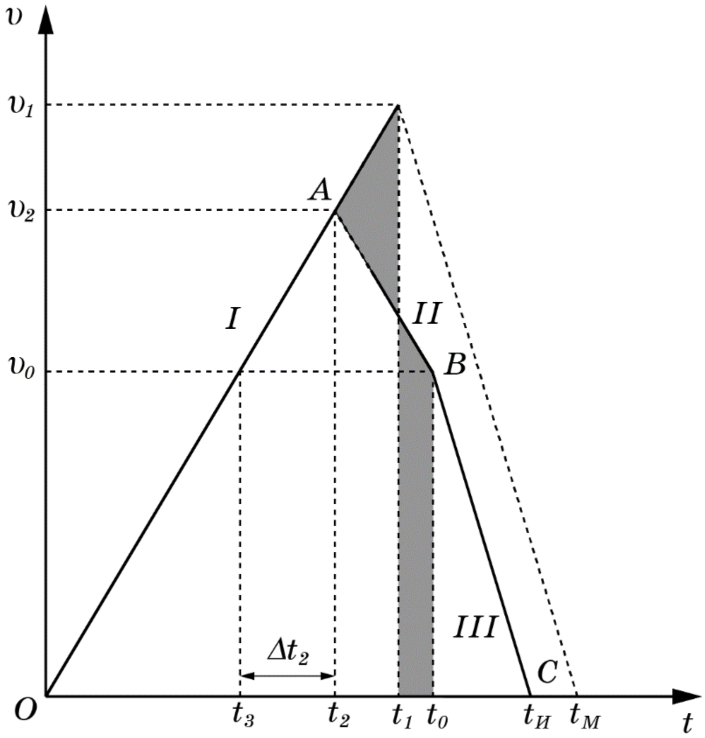


Задача 1. Испытания автомобиля. Плоский горизонтальный полигон для испытания гоночных автомобилей имеет два участка с разным покрытием. По условиям испытаний автомобиль должен проехать по прямой расстояние L от линии старта до линии границы между участками в одном направлении, стартуя с нулевой начальной скоростью (см. рисунок). После пересечения линии границы автомобиль должен остановиться. Коэффициент трения на первом участке равен μ, а на втором 2μ. За какое минимальное время $t_И$ автомобиль может выполнить это испытание (от старта до полной остановки)? Какая при этом будет скорость υ_0 у автомобиля при пересечении им линии границы участков? Нарисуйте график зависимости скорости автомобиля от времени, соответствующий вашему решению, и отметьте на нем момент прохождения автомобилем линии границы. Автомобиль полноприводный с неограниченной мощностью двигателя. Размерами машины по сравнению с L пренебречь.

Возможное решение.

1. Если участок длиной L проехать максимально быстро (с максимально возможным ускорением $a=\mu g$), то скорость на линии границы будет $\upsilon_1=\sqrt{2\mu gL}$, а время разгона $t_1=\sqrt{\dfrac{2L}{\mu g}}$. При этом минимально возможное время торможения за линией границы составит $t_M-t_1=\sqrt{\dfrac{L}{2\mu g}}$. Общее время испытания $t_M=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2L}{\mu g}}\approx 2{,}12\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}}$.
2. Если пересекать линию границы со скоростью $\upsilon_0<\upsilon_1$, то увеличится время достижения этой линии, но сократится время торможения за ней. Вопрос о конкуренции между этими изменениями времен требует дополнительного изучения.
3. Пусть на границе скорость $\upsilon_0(\upsilon_0<\upsilon_1)$, которая достигается за минимально возможное время t_0 при следующем характере движения: разгон с максимальным положительным ускорением $a=\mu g$ до такой скорости $\upsilon_2>\upsilon_0$, при которой оставшегося пути хватит, чтобы сбросить эту скорость до заданной υ_0 при максимально возможном отрицательном ускорении $a_{ТОРМ}=-\mu g$. Данное утверждение иллюстрируется рисунком.

22 января на портале http://abitu.net/vseros будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.



На рисунке участок *I* соответствует разгону с максимальным ускорением μg, участок *II* соответствует заблаговременному торможению (с максимальным ускорением $-\mu g$) от скорости υ_2 до скорости υ_0 на границе, участок III – торможению за линией границы с ускорением $-2\mu g$ до полной остановки в момент $t_И$. Отметим, что площади серых фигур равны (так как пути в первом движении до t_1 и во втором движении до t_0 равны L).

С помощью рисунка найдем зависимость t_0 от υ_0.

Первый раз скорость υ_0 достигается в момент $t_3 = \dfrac{\upsilon_0}{\mu g}$, к этому моменту пройден путь $S_1 = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu g}$. Половина оставшегося до границы пути пройдена за время Δt_2, и

$$\frac{L - S_1}{2} = \upsilon_0 \Delta t_2 + \frac{\mu g \Delta t_2^2}{2} = \frac{L}{2} - \frac{\upsilon_0^2}{4\mu g}.$$

Выразим $\Delta t_2 = \sqrt{\dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu^2 g^2} + \dfrac{L}{\mu g}} - \dfrac{\upsilon_0}{\mu g}$, а полное время движения до границы:

$$t_0 = t_3 + 2\Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{2\mu^2 g^2} + \frac{L}{\mu g}} - \frac{\upsilon_0}{\mu g}$$

4. Полное время испытания $t_и$, согласно условию задачи, равно $t_0 + t_т$, где $t_T = \dfrac{\upsilon_0}{2\mu g}$ – время торможения за линией финиша

$$t_И = t_0 + t_T = 2\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{2\mu^2 g^2} + \frac{L}{\mu g}} - \frac{\upsilon_0}{2\mu g}$$

Необходимо найти минимум данного выражения, варьируя его по υ_0.

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Для упрощения исследования производной сделаем замены:

$x=\frac{\upsilon_0}{2\mu g};b=\frac{L}{\mu g};t_И=\sqrt{8x^2+4b}-x$, x и b – по физическому смыслу положительны.

Возьмём производную по x и приравняем её нулю:

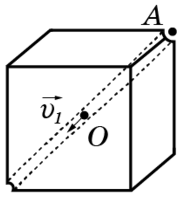
$$0=\frac{16x}{2\sqrt{8x^2+4b}}-1\Rightarrow\sqrt{8x^2+4b}=8x\Rightarrow 8x^2+4b=64x^2\Rightarrow 56x^2=4b$$

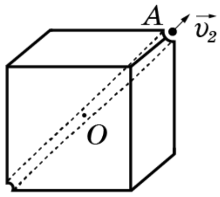
Возвращаясь к старым переменным: $56\frac{\upsilon_0^2}{4\mu^2g^2}=4\frac{L}{\mu g}\Rightarrow\upsilon_0^2=\frac{2}{7}\mu gL\Rightarrow\upsilon_0=\sqrt{\frac{2}{7}\mu gL}$

Тогда $t_И=2\sqrt{\frac{2L}{14\mu g}+\frac{L}{\mu g}}-\sqrt{\frac{L}{14\mu g}}=\sqrt{\frac{7L}{2\mu g}}\approx 1{,}87\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$

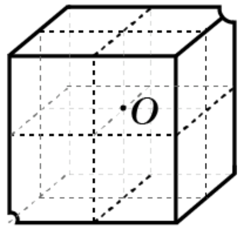
22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Задача 2. Кубическая планета. На планете в форме куба из однородного материала вдоль большой диагонали высверлили узкий прямой гладкий канал. Если маленький шарик отпустить без начальной скорости из точки A (вершина куба), его скорость в момент прохождения центра куба (точка O) будет равна υ_1. Какую минимальную скорость υ_2 нужно сообщить шарику при запуске в космос из точки A, чтобы он мог покинуть поле тяготения планеты? Атмосферы у планеты нет.





Возможное решение. Исходный куб можно составить из восьми кубиков с ребром вдвое меньшего размера (см. рисунок). По аналогии с электростатикой введем гравитационный потенциал φ, который в вершине любого однородного куба будет прямо пропорционален его массе и обратно пропорционален линейным размерам с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.



Пусть длина ребра и масса малого кубика равны соответственно b и m, а гравитационный потенциал в его центре равен φ_0. Тогда $\varphi_0 = -k\frac{m}{b} = -k\frac{\rho b^3}{b} = -k\rho b^2$, (1)

где k – некоторый размерный коэффициент, а ρ – плотность планеты. Здесь мы учли, что энергия гравитационного взаимодействия отрицательна, если за нулевой уровень принять энергию на бесконечности.

Потенциал в центре большого куба из принципа суперпозиции $\varphi_1 = 8\varphi_0$, а потенциал в его вершине по аналогии с (1) $\varphi_2 = -k\frac{\rho(2b)^3}{2b} = -4k\rho b^2 = 4\varphi_0$.

Следовательно, для любого куба отношение потенциала в центре к потенциалу в его углу равно 2, т.е. $\varphi_1 = 2\varphi_2$.

Из закона сохранения энергии следует:

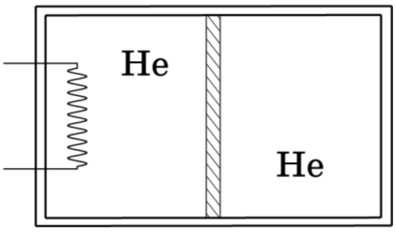
$$\begin{cases} m\varphi_2 = m\varphi_1 + \dfrac{mv_1^2}{2}; & (2) \\ m\varphi_2 + \dfrac{mv_2^2}{2} = 0. & (3) \end{cases}$$

Из системы уравнений (2) и (3) следует:

$$\begin{cases} v_1^2 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = -2\varphi_2; \\ v_2^2 = -2\varphi_2. \end{cases}$$

Окончательно получим $v_2 = v_1$.

22 января на портале http://abitu.net/vseros будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.



Задача 3. Сосуд с поршнем. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на **малую величину** ΔT. Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q, переданное нагревателем.

Возможное решение

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для 1 моль газа, находящегося в начальном и в конечном состоянии:

$$\begin{cases} P_0V = RT_0 \\ P_1(V+\Delta V) = R(T_0+\Delta T) \\ P_1(V-\Delta V) = R(T_0+\Delta T_2) \end{cases}$$

Здесь учтено, что давление в левой и правой частях всегда (при равновесном процессе) одинаково, а суммарный объём частей не изменяется.

Составим пропорцию из уравнений для конечного состояния:

$$\frac{(V+\Delta V)}{(V-\Delta V)} = \frac{(T_0+\Delta T)}{(T_0+\Delta T_2)}$$

$$(V+\Delta V)(T_0+\Delta T_2) = (V-\Delta V)(T_0+\Delta T)$$

$$VT_0 + V\Delta T_2 + T_0\Delta V = VT_0 + V\Delta T - T_0\Delta V$$

$$2\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \qquad (1)$$

При раскрытии скобок мы пренебрегаем малыми величинами второго порядка $\Delta V\Delta T$ и $\Delta V\Delta T_2$.

Запишем первое начало термодинамики для процессов в цилиндре:

$$\begin{cases} Q = A + \Delta U_{ЛЕВ} = A + \frac{3}{2}R\Delta T \\ 0 = -A + \Delta U_{ПРАВ} = -A + \frac{3}{2}R\Delta T_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь учтено, что процесс в правой части сосуда адиабатный, а суммарная работа в системе равна нулю.

Для малых изменений объёма и давления работу можно представить в виде:

$A = P_0\Delta V$, что даёт нам вместе с условием на адиабатный процесс (2):

$$0 = -P_0\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T_2 \Rightarrow \Delta V = \frac{3}{2}\frac{R\Delta T_2}{P_0} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{R\Delta T_2}{P_0V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{R\Delta T_2}{RT_0} = \frac{3}{2}\frac{\Delta T_2}{T_0}$$

Подставляем эту связь в уравнение (1)

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

$$3\frac{\Delta T_2}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \Rightarrow \Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4}.$$

Тогда

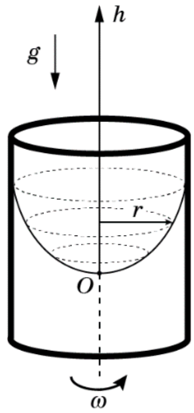
$$A = \frac{3}{2}R\frac{\Delta T}{4}$$

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{3}{2}R\frac{\Delta T}{4} = \frac{15}{8}R\Delta T$$

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Задача 4. Айс. Вертикальный цилиндрический сосуд с водой, равномерно вращающийся вокруг своей оси с периодом T_0, быстро охлаждают, так что на поверхности появляется тонкая гладкая ледяная корка. На корку вблизи оси сосуда без начальной скорости помещают маленькую бусинку, которая может без трения скользить по поверхности. Найдите период T ее малых колебаний.

Возможное решение



Равновесная форма поверхности воды во вращающемся сосуде определяется уравнением $\rho g h = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$, где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения, h – высота, на которой находится участок поверхности, $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ – угловая скорость вращения, а r – расстояние от оси вращения до рассматриваемого участка.

Потенциальная энергия бусинки на корке $E_{\text{пот}} = mgh = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ совпадает с потенциальной энергией деформированной пружины

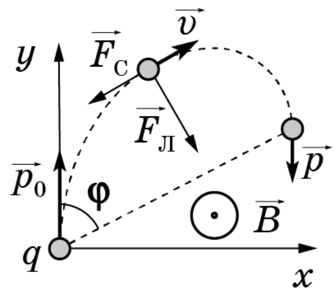
$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}kr^2$ жесткостью $k = m\omega^2$. Период колебаний соответствующего маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega} = T_0$!

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Задача 5. Остановка частицы в магнитном поле. Маленькая частица с положительным зарядом q движется в однородном магнитном поле с индукцией B в вязкой среде. Сила сопротивления среды, действующая на частичку, прямо пропорциональна ее скорости. В начальный момент времени импульс частицы равнялся p_0 и был направлен перпендикулярно линиям индукции. Вектор перемещения частицы к моменту, когда скорость частицы впервые оказалась противонаправлена начальной скорости, составляет острый угол φ с вектором $\overrightarrow{p_0}$.

1) Какой путь прошла частица до остановки?
2) Чему равен модуль перемещения частицы до остановки?

Силой тяжести пренебречь.



Возможное решение. Выберем начало координат в т. А, направим ось y по направлению вектора скорости частицы в т. А, а ось x – перпендикулярно $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{B}$ так, чтобы в начальный момент времени сила Лоренца действовала в положительном направлении оси x. Пусть b - коэффициент пропорциональности в зависимости силы сопротивления от скорости частицы $\vec{F}_c = -b\vec{\upsilon}$

Уравнение движения частицы в проекции на координатные оси выглядит так

$$\begin{cases} ma_x = qB\upsilon_y - b\upsilon_x \\ ma_y = -qB\upsilon_x - b\upsilon_y \end{cases}$$

Сделаем замены $\dfrac{qB}{m} = k$ и $\dfrac{b}{m} = \alpha$, и для малого интервала времени Δt $a_x = \dfrac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}; a_y = \dfrac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = k\upsilon_y - \alpha\upsilon_x \\ \dfrac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t} = -kB\upsilon_x - \alpha\upsilon_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\upsilon_x = k\upsilon_y\Delta t - \alpha\upsilon_x\Delta t = k\Delta y - \alpha\Delta x \\ \Delta\upsilon_y = -k\upsilon_x\Delta t - \alpha\upsilon_y\Delta t = -k\Delta x - \alpha\Delta y \end{cases}$$

Здесь Δx и Δy - изменение координат частицы за малый промежуток времени Δt. Суммируя изменения проекций скорости и координат частицы за произвольное время от начала движения, получим

$$\begin{cases} v_x = ky - \alpha x \\ v_y - v_0 = -kx - \alpha y \end{cases}$$

В точке C вектор скорости частицы антипараллелен $\overrightarrow{v_0}$ и $v_x = 0$. Отсюда $ky = \alpha x$ и $\frac{x}{y} = \frac{k}{\alpha} = tg\varphi,\ \alpha = kctg\varphi.$

Сила Лоренца действует перпендикулярно скорости и изменение модуля скорости частицы определяется только силой сопротивления. Поэтому

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\alpha v$$

$\Delta v = -\alpha v \Delta t = -\alpha \Delta s,$

где Δs – расстояние, пройденное за Δt. Суммируя обе части уравнения за произвольное время движения, получаем

$v - v_0 = -\alpha s,$

$$v_0 = \alpha S = kSctg\varphi,$$

$$S = \frac{mv_0 tg\varphi}{qB} = \frac{p_0 tg\varphi}{qB}.$$

Здесь S – расстояние, пройденное частицей от начала движения до момента остановки. Пусть координаты точки O (точки остановки) x_0, y_0. Так как в этой точке $v_x = 0$, $y_0 = x_0 ctg\varphi$.

$$v_y - v_0 = -v_0 = -kx_0 - \alpha y_0 = -kx_0(1 + ctg^2\varphi) = -\frac{kx_0}{sin^2\varphi}$$

$$x_0 = \frac{mv_0}{qB} sin^2\varphi.$$

Расстояние от начальной точки до точки остановки

$$AO = l = \frac{x_0}{sin\varphi} = \frac{p_0}{qB} sin\varphi.$$

Уточненные критерии
11 класс
Задача 1

1	Представлен график зависимости скорости от времени, позволяющий обосновать алгоритм движения автомобиля (достаточно присутствия на графике точек *OABC*). График может носить качественный характер, и может быть построен на любом этапе решения.	2 балла
2	Предложен правильный алгоритм движения на участке длиной L, обеспечивающий минимальное время его прохождения при заданной скорости v_0 на границе. Алгоритм может быть описан качественно, но должен быть обоснован.	2 балла
3	Получена зависимость времени t_0 прохождения участка длиной L от введенного параметра (заданной скорости на линии границы, момента начала торможения и т.п.): а) правильно записаны кинематические соотношения; б) получен правильный результат в виде функции – зависимости t_0 от введенного параметра.	 1 балл 1 балл
4	Получено выражение для полного времени испытания как функция скорости на линии границы. ВНИМАНИЕ! Это выражение может содержать ошибку, но всё равно оценивается в 1 балл, если оно есть!	1 балл
5	Проведен анализ полученного выражения на минимум. ВНИМАНИЕ! Если анализировалось неправильное выражение (из п. 4), но его анализ был проведен правильно, то за это всё равно ставится 1 балл.	1 балл
6	Получен ответ для минимального времени испытания – только если ответ правильный!	1 балл
7	Получен ответ для скорости на линии границы, при которой реализуется минимальное время испытания – только если ответ правильный!	1 балл

Задача 2

1	Идея разбиения куба на 8 кубиков вдвое меньшего размера	3 балла
2	Установлена связь потенциала в центре куба с потенциалом в вершине кубика вдвое меньшего по размеру: $\varphi_1 = 8\varphi_0$	2 балла
3	Доказано, что при увеличении размера куба в 2 раза при сохранении плотности потенциал в его вершине увеличивается в 4 раза: $\varphi_2 = 4\varphi_0$ (1 балл – за указание на пропорциональность массы кубу линейного размера, и еще 1 балл – за указание на формулу $\varphi \sim m/r$)	2 балла
4	Записана система двух уравнений: закон сохранения энергии для скоростей и потенциалов (по 1 баллу за каждое уравнение).	2 балла
5	Обоснованно получен верный ответ для второй космической скорости кубической планеты	1 балл

Если используются формулы для сферической планеты, то такое решение считается полностью неправильным и за него ставится 0 баллов.

Задача 3

1	Записаны уравнения для начального и конечного состояний газа в правой и левой части сосуда (в любых обозначениях)	1 балл
2	Учтено равенство давлений и связь изменений объёмов (непосредственно в записанных уравнениях, либо оговорено отдельно)	1 балл
3	Получено выражение (1): а) Если выражение (1) получено, а уравнения состояния не писались (сразу была написана пропорция), то пункты 1-3 считаются выполненными, и ставится сразу 4 балла. б) Выражение (1) может быть записано в виде $2T_0\Delta V = V(\Delta T - \Delta T_2)$ с) Если в процессе получения выражения (1) малыми величинами второго порядка не пренебрегли, тоже ставится полный балл.	2 балла
4	Записаны выражения для I-го начала термодинамики в данных процессах: а) Важно, чтобы в данных выражениях был отражен факт адиабатного процесса в правой части сосуда и равенство работ газов (с противоположным знаком). Баллы ставятся именно за эти факты! б) Вместо двух выражений может быть записан один закон для системы в целом: $Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T_2$.	2 балла
5	Записано выражение для работы при малом изменении объема и давления ($A \approx p\Delta V$ ввиду малости ΔV).	1 балл
6	Получена связь между ΔV и ΔT_2: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta T_2}{T_0}$.	1 балла
7	Определено изменение температуры ΔT_2	1 балл
8	Получено окончательное выражение для Q	1 балл

Возможно решение, основанное на том факте, что процесс в левой части сосуда является политропическим с показателем политропы $n = -5/3$. Отсюда легко получается выражение для молярной теплоемкости газа в этом процессе ($15R/8$), откуда следует ответ. Такое решение должно оцениваться полным баллом, если оно является полностью правильным.

Задача 4

1	Записано выражение для связи угловой скорости с периодом.	1 балл
2	Получена зависимость $h(r)$.	2 балла
3	Записано выражение для потенциальной энергии бусинки на корке через r.	2 балла
4	Выражение из п. 3 сравнивается с выражением для потенциальной энергии известной гармонической колебательной системы (например, пружинного маятника).	2 балла
5	Записано выражение для периода колебаний системы из п.4. (той, с которой сравнивали) – его можно считать известным и не выводить.	1 балл
6	Обоснованно получен ответ $T = T_0$.	2 балла

Возможен динамический способ решения задачи.

1	Записано выражение для связи угловой скорости с периодом.	1 балл
2	Получена зависимость $h(r)$.	2 балла
3	Записан второй закон Ньютона для движения бусинки	2 балла
4	Уравнение из п.3 приведено к виду уравнения гармонических колебаний (для малых колебаний)	3 балла
5	Обоснованно получен ответ $T = T_0$.	2 балла

Задача 5

1	Записан второй закон Ньютона для проекций на координатные оси.	1 балл
2	Переход от уравнений п.1 к уравнениям, связывающим изменение проекций скорости с координатами частицы (умножение исходных уравнений на Δt).	1 балл
3	Использование уравнений п.2 для выражения коэффициента α через заданные в условии параметры.	2 балла
4	Получено соотношение $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\alpha v$ (из второго закон Ньютона, записанного в проекции на направление движения частицы, либо из теоремы о кинетической энергии).	1 балл
5	Получено выражение для связи изменения модуля импульса частицы с пройденным расстоянием – получается умножением выражения из. п. 4 на Δt.	1 балл
6	Получен верный результат для пройденного пути S.	1 балл
7	Получены уравнения, связывающие координаты точки остановки частицы с проекциями начальной скорости.	1 балл
8	Определены координаты точки остановки и модуль AO перемещения частицы.	2 балла

Возможно решение и другими способами.

- путем непосредственного решения получаемых дифференциальных уравнений;
- путем записи уравнений движения в векторной форме и дальнейшего суммирования малых изменений радиус-векторов;
- путем перехода в систему отсчета, движущуюся с дрейфовой скоростью.