11 класс

Первый день

11.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», …, десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

11.2. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

11.3. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

11.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, … такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего.

11.5. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», …, десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

11.2. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

11.3. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

11.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, … такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего.

11.5. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.