10 класс

Второй день

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a} \right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a} \right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)