Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3=3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k>3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

9.7. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, может.

Решение. На рис. 1 показано, как можно положить три пары прямоугольников так, чтобы для каждой пары все точки A, B, C, D, E, F, G, H были вершинами ровно по разу. Одинаковыми точками отмечены вершины одного из прямоугольников пары.

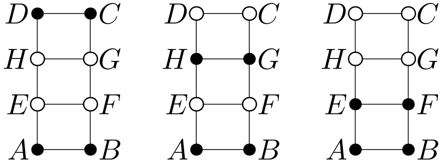

Рис. 1

Замечание. Существует много других примеров; один из них указан на рис. 2.

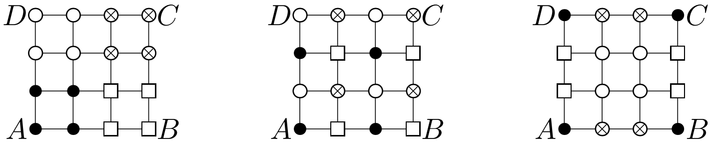

Рис. 2

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

9.8. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный. *(А. Кузнецов)*

Первое решение. Обозначим $\angle CBM = \alpha$. Поскольку BM — внешняя биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = 180^\circ - \alpha$ и $\alpha < 90^\circ$ (см. рис. 3). Опустим из точки D перпендикуляр DH на прямую BC. Так как в треугольнике BCD углы при вершинах B и C острые, точка H лежит на отрезке BC. Поскольку DCH — прямоугольный треугольник с углом 60°, имеем $CH = \frac{CD}{2} = AB$.

Треугольник BHD — прямоугольный, HM — его медиана, проведённая к гипотенузе, поэтому $HM = \frac{BD}{2} = BM$. Следовательно, $\angle MHB = \angle HBM = \alpha$, откуда мы получаем, что $\angle MHC = 180^\circ - \alpha = \angle ABM$. Поскольку также $AB = CH$ и $BM = MH$, треугольники ABM и CHM равны. Таким образом, $AM = MC$, что и требовалось доказать.

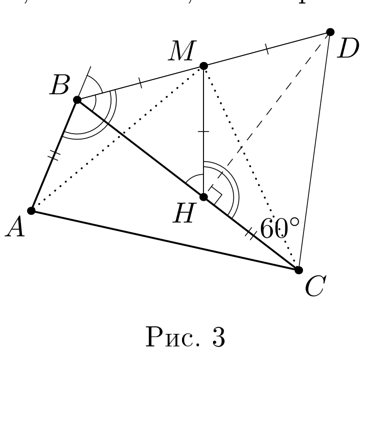

Рис. 3

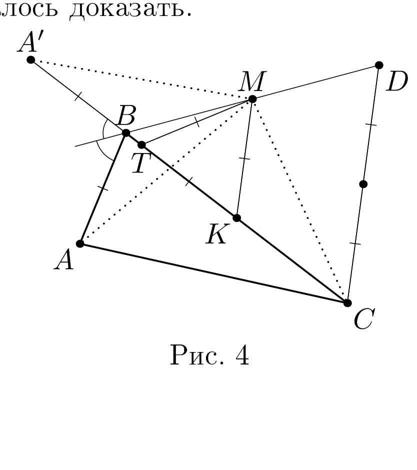

Рис. 4

Второе решение. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно прямой BD (см. рис. 4). Поскольку BD — внешняя биссектриса угла ABC, точка A' лежит на продолжении отрезка CB за точку B. Пусть K — середина отрезка BC. Тогда MK — средняя линия треугольника BCD, поэтому $MK \parallel CD$ и $\angle MKB = \angle BCD = 60°$, а также $MK = \frac{CD}{2} = AB = A'B$. На отрезке $A'K$ отметим точку T так, что $MK = KT$. Тогда из того, что $TK = MK = A'B$, следует $A'T = BK = KC$. Заметим, что треугольник MKT равносторонний, так как $MK = KT$ и $\angle MKT = 60°$. Тогда $MT = MK$ и $\angle MTA' = 120° = \angle MKC$, а, как было доказано ранее, $A'T = CK$. Значит, треугольники MKC и MTA' равны, поэтому $CM = A'M = AM$.

Замечание. Вместо того, чтобы отмечать точку T, можно записать теорему косинусов для треугольников $A'KM$ и MCK. В них углы при вершине K равны $60°$ и $120°$ соответственно. Пусть $MK = A'B = a$, $BK = KC = b$. Тогда

$$A'M = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 - a(a+b)} = \sqrt{a^2 + ab + b^2} = CM.$$

Комментарий. Только за декларацию того, что нужно доказывать равенство $AM = MC$, баллы не добавляются.

Опущен перпендикуляр DH и замечено, что $CH = AB$ — 2 балла.

Замечено дополнительно, что $MH = MB$ (или $MH = MD$) — добавляется 1 балл.

Построена точка A', симметричная точке A относительно CD, и замечено, что достаточно доказать равенство $MA' = MC$ — 1 балл (не суммируется с предыдущими).

За отсутствие обоснования того, что точка H лежит на отрезке BC (а не на его продолжении), баллы не снимаются.

9.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. (*С. Берлов*)

Ответ. $n^2 - n$.

Решение. Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем решении не рассматриваются.

Назовём сторону многоугольника *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета (то есть расширим определение разноцветности на стороны). Назовём раскраску вершин *упорядоченной*, если все чёрные вершины на границе многоугольника идут подряд (иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветных стороны).

Лемма. *Раскраска вершин n-угольника (при $n \geqslant 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 3$ доказывать нечего (напомним, что мы не рассматриваем одноцветные раскраски). Докажем теперь переход индукции. Пусть утверждение доказано для всех m таких, что $3 \leqslant m < n$, где $n \geqslant 4$.

Предположим, что раскраска является хорошей. Разобьём многоугольник на треугольники непересекающимися разноцветными диагоналями; рассмотрим одну из этих диагоналей AB. Она делит n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2 с меньшим количеством сторон, причём каждый из них раскрашен хорошо — а значит, по предположению индукции, и упорядоченно. Пусть A — чёрный конец диагонали, а B — белый. Все чёрные вершины в P_1 — это несколько последовательных вершин, начиная с A (но не включая B). Аналогично с чёрными вершинами в P_2. Но тогда эти два блока чёрных вершин в объединении дают один связный блок в исходном многоугольнике, то есть раскраска вершин n-угольника также является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска является упорядоченной. Нетрудно видеть, что тогда в многоугольнике есть разноцветная диагональ. Она делит многоугольник на два меньших, при этом, очевидно, каждый из них также раскрашен упорядоченно. По предположению индукции, каждый из них раскрашен хорошо, а значит, и исходный n-угольник — тоже. $\square$

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества чёрных вершин (от 1 до $n-1$) можно n способами выбрать расположение их блока среди всех n вершин, то есть число способов равно $n(n-1)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

В работе сформулирована лемма (из решения выше) — 1 балл.

Лемма полностью доказана — добавляются 4 балла.

Доказана только одна из двух половин утверждения леммы (т. е. либо то, что любая хорошая раскраска упорядочена, либо наоборот) — добавляются 2 балла вместо 4.

Произведён подсчёт количества упорядоченных раскрасок — добавляются 2 балла (эти баллы могут быть добавлены только при наличии *формулировки* леммы, с доказательством или без).

В этом подсчёте совершены мелкие ошибки (например, приводящие ко вдвое меньшему ответу) — добавляется 1 балл вместо 2.

При индукционном доказательстве леммы (сформулированной для всех $n \geqslant 4$) может возникнуть проблема, особенно при малых значениях n: разноцветная диагональ может отсекать треугольник, к которому предположение индукции неприменимо. Если такое встретилось в работе — снимается 1 балл.

9.10. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре? (*А. Храбров*)

Ответ. $\frac{1}{396}$.

Решение. Если Петя выберет числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{198}, \frac{1}{198}, \ldots, \frac{1}{198}$, то, как бы ни разбивал эти числа Вася, в паре с числом $\frac{1}{2}$ будет число $\frac{1}{198}$. Их произведение будет равно $\frac{1}{396}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{396}$.

Покажем, как Васе для любых Петиных чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{396}$. Перенумеруем числа в порядке невозрастания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100}$. Разобьём числа на пары следующим образом: x_k в паре с x_{101-k}. Тогда произведениями чисел в парах будут

$$x_1x_{100},\ x_2x_{99},\ x_3x_{98},\ \ldots,\ x_kx_{101-k},\ \ldots,\ x_{50}x_{51}.$$

Покажем, что $a = x_kx_{101-k} \leqslant \frac{1}{396}$ при $k \leqslant 49$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{101-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{101-k}.$$

Аналогично из неравенств $x_{101-k} \leqslant x_{100-k} \leqslant x_{99-k} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$ следует, что

$$(101 - 2k)x_{101-k} \leqslant x_{101-k} + x_{100-k} + \ldots + x_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{100} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k.$$

Поэтому
$k(101-2k)a \leqslant (x_1+x_2+\ldots+x_k)(1-x_1-x_2-\ldots-x_k) = x(1-x)$, где $x = x_1+x_2+\ldots+x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x(1-x) \leqslant \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, получаем неравенство $x_kx_{101-k} = a \leqslant \frac{1}{4k(101-2k)}$. Осталось доказать, что $k(101 - 2k) \geqslant 99$ при $k \leqslant 49$. Это неравенство можно переписать в виде $(k-1)(99-2k) \geqslant 0$, и обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Осталось доказать, что $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{396}$. Поскольку $x_{50} \leqslant x_{49} \leqslant x_{48} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1$, имеем

$$x_{50} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} \leqslant \frac{1}{50}$$

и, аналогично,

$$x_{41} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{51}}{51} \leqslant \frac{1}{51}.$$

Следовательно, $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{50 \cdot 51} < \frac{1}{396}$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример Петиных чисел, при котором на доске окажется $\frac{1}{396}$ — 1 балл.

Только доказательство того, что Вася всегда может получить число, не меньшее $\frac{1}{396}$ — 5 баллов.

Только указание, что Васе нужно разбивать числа $x_1 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant x_{101}$ на пары вида $x_k x_{101-k}$, баллов не добавляет.

Если в работе *доказано*, что при таком разбиении на доске получится не большее число, чем при любом другом — ставится 1 балл (этот балл может суммироваться с баллом за пример).