Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3 = 3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

(*А. Храбров*)

Решение. Докажем, что $x_n > x_{n+1}$. Положим $A = \sqrt[2^{n+1}]{a}$ и $B = \sqrt[2^{n+1}]{b}$. Легко видеть, что $B > A > 1$, отсюда $\dfrac{A+B}{2} > 1$. Тогда имеем

$$x_{n+1} = 2^{n+1}(B - A) > 0,$$

$$x_n = 2^n(B^2 - A^2) = 2^{n+1}(B-A)\,\frac{A+B}{2} = x_{n+1}\cdot\frac{A+B}{2} > x_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Комментарий. Идея рассмотрения отношения двух соседних членов последовательности — 2 балла.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть O — центр окружности Ω; иначе говоря, O — середина диаметра BB'. Обозначим через H' и P проекции точек B' и O соответственно на прямую AC (см. рис. 5). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к MN, получаем, что P — середина MN. Поскольку O — середина BB', P является серединой HH'. Получаем, что H и H' симметричны относительно середины MN, откуда $HM = H'N$ и $H'M = HN$. Имеем $AH' = AM + H'M = HM + H'M = H'N + HN = H'N + CN = CH'$. Таким образом, $B'H'$ — серединный перпендикуляр к отрезку AC, следовательно, $AB' = CB'$, что и требовалось доказать.

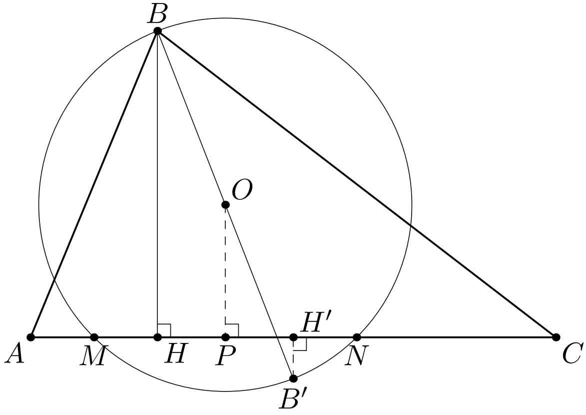

Рис. 5

Комментарий. Рассмотрена проекция H' точки B' на прямую AC и показано, что для решения задачи достаточно доказать, что H и H' симметричны относительно середины MN — 2 балла.

Если в условии не фигурирует середина отрезка MN, а лишь указано, что достаточно доказать равенство $HM = H'N$ или эквивалентное равенство — ставится 1 балл вместо 2.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. (*С. Берлов*)

Ответ. $n^2 - n$.

Решение. Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем решении не рассматриваются.

Назовём сторону многоугольника *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета (то есть расширим определение разноцветности на стороны). Назовём раскраску вершин *упорядоченной*, если все чёрные вершины на границе многоугольника идут подряд (иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветных стороны).

Лемма. *Раскраска вершин n-угольника (при $n \geqslant 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 3$ доказывать нечего (напомним, что мы не рассматриваем одноцветные раскраски). Докажем теперь переход индукции. Пусть утверждение доказано для всех m таких, что $3 \leqslant m < n$, где $n \geqslant 4$.

Предположим, что раскраска является хорошей. Разобьём многоугольник на треугольники непересекающимися разноцветными диагоналями; рассмотрим одну из этих диагоналей AB. Она делит n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2 с меньшим количеством сторон, причём каждый из них раскрашен хорошо — а значит, по предположению индукции, и упорядоченно. Пусть A — чёрный конец диагонали, а B — белый. Все чёрные вершины в P_1 — это несколько последовательных вершин, начиная с A (но не включая B). Аналогично с чёрными вершинами в P_2. Но тогда эти два блока чёрных вершин в объединении дают один связный блок в исходном многоугольнике, то есть раскраска вершин n-угольника также является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска является упорядоченной. Нетрудно видеть, что тогда в многоугольнике есть разноцветная диагональ. Она делит многоугольник на два меньших, при этом, очевидно, каждый из них также раскрашен упорядоченно. По предположению индукции, каждый из них раскрашен хорошо, а значит, и исходный n-угольник — тоже. $\square$

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества чёрных вершин (от 1 до $n-1$) можно n способами выбрать расположение их блока среди всех n вершин, то есть число способов равно $n(n-1)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

В работе сформулирована лемма (из решения выше) — 1 балл.

Лемма полностью доказана — добавляются 4 балла.

Доказана только одна из двух половин утверждения леммы (т. е. либо то, что любая хорошая раскраска упорядочена, либо наоборот) — добавляются 2 балла вместо 4.

Произведён подсчёт количества упорядоченных раскрасок — добавляются 2 балла (эти баллы могут быть добавлены только при наличии *формулировки* леммы, с доказательством или без).

В этом подсчёте совершены мелкие ошибки (например, приводящие ко вдвое меньшему ответу) — добавляется 1 балл вместо 2.

При индукционном доказательстве леммы (сформулированной для всех $n \geqslant 4$) может возникнуть проблема, особенно при малых значениях n: разноцветная диагональ может отсекать треугольник, к которому предположение индукции неприменимо. Если такое встретилось в работе — снимается 1 балл.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

(*А. С. Голованов*)

Решение. Среди чисел a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, $\ldots$ выберем число, которое даёт наименьший остаток при делении на k. Пусть это число a_m, и пусть оно даёт остаток r при делении на k. Если $r = 0$, то a_m — нужный нам член последовательности. Предположим теперь, что $0 < r < k$.

Поскольку $m \geqslant k$, имеем $m^2 + k \leqslant m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$, поэтому $[\sqrt{m^2+1}] = [\sqrt{m^2+2}] = \ldots = [\sqrt{m^2+k}] = m$. Отсюда $a_{m^2+1} = a_{m^2} + a_m$, $a_{m^2+2} = a_{m^2+1} + a_m$, $\ldots$, $a_{m^2+k} = a_{m^2+k-1} + a_m$, т. е. $a_{m^2+t} = a_{m^2} + ta_m$ для $t = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть a_{m^2} даёт остаток R при делении на k, тогда a_{m^2+t} даёт при делении на k такой же остаток, как и число $R + tr$. В ряду чисел R, $R + r$, $R + 2r$, $\ldots$, $R + kr$ найдём первое число, не меньшее k (такое число найдётся, так как $R < k$, а $R + kr \geqslant R + k \geqslant k$). Пусть это число $R + sr$. Тогда $R + (s-1)r < k \leqslant R + sr$, откуда $0 \leqslant (R + sr) - k < r$, поэтому у числа $R + sr$, а значит, и у числа a_{m^2+s}, остаток при делении на k строго меньше r, что противоречит нашему выбору.

Замечание. Важный шаг в решении — обнаружение «длинной» арифметической прогрессии $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ с разностью a_m. При некоторых ограничивающих условиях, например, если k — простое число, или если a_m взаимно просто с k, решение задачи завершается уже на этом шаге (поскольку если a_m взаимно просто с k, то в этой прогрессии встретятся все остатки при делении на k). Трудная часть задачи — рассмотрение ситуации, когда все a_n (при достаточно больших n) не взаимно просты с k.

Комментарий. В последовательности обнаружена «длинная» арифметическая прогрессия $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ — 1 балл.

Из наличия «длинной» арифметической прогрессии выведено решение при существенных ограничивающих условиях — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).