11 класс

Задача 1. Два цилиндра *(А. И. Уймин)*

Если проскальзывания нет, то длина дуги AB равна длине дуги BD (и OE). Так как радиусы цилиндров различаются в два раза, то $\angle OCE = 2 \cdot \angle AOB$.

Треугольник OCE — равнобедренный, значит $\angle COE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle OCE = 90^\circ - \angle AOB$, а значит $\angle AOE = 90^\circ$.

Таким образом тело всегда находится на перпендикуляре к OA, то есть движется по прямой, составляющей угол α с горизонтом.

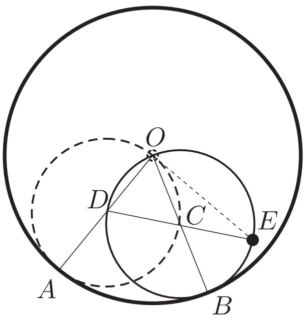

Рис. 31

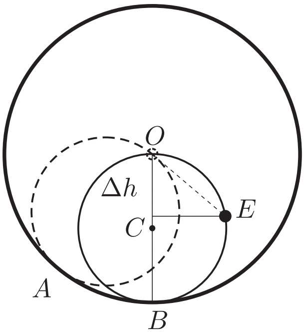

Рис. 32

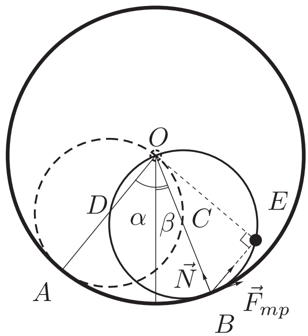

Рис. 33

1. Запишем закон сохранения энергии для тела, которое движется по прямой линии. Пусть оно сместилось на расстояние l вдоль прямой OE. Тогда изменение высоты равно $\Delta h = -l \sin\alpha$.

   В итоге получаем: $0 = -mgl\sin\alpha + \frac{mv^2}{2}$, а ускорение постоянно и равно:

$$a = g\sin\alpha$$

2. Найдём изменение высоты тела, когда плоскость OC вертикальна (рис. 32). $\Delta h = -R(1 - \cos(2\alpha))/2$. Тогда по закону сохранения энергии:

$$v = \sqrt{2gR}\sin\alpha.$$

3. На систему «тело-меньший цилиндр» действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 33). Сумма векторов сил реакции и трения направлена перпендикулярно OE (прямо на тело, т.к. на меньший цилиндр не может действовать ненулевой момент сил, потому что массой цилиндра и размером тела мы пренебрегаем) и равна по модулю $mg\cos\alpha$. Тогда:

$$N = mg\cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$$

$$F_{\text{тр}} = mg\cos\alpha\sin(\alpha+\beta),$$

где β — угол отклонения плоскости OC от вертикали, отсчитываемый в направлении качения.
Условие $F_{\text{тр}} \le \mu N$ даёт условие для отсутствия проскальзывания:

$$\mu \ge \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$$

Для того, чтобы плоскость OC заняла симметричное начальному положение должно быть выполнено $\beta = \alpha$:

$$\mu_{min} = \operatorname{tg}(2\alpha)$$

4. Проскальзывание начнётся при $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \mu$. А к этому моменту тело вдоль прямой OE пройдёт расстояние $l = R\sin(\alpha+\beta) = R\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.
В таком случае из закона сохранения энергии получаем:

$$v = \sqrt{\frac{2gR\mu\sin\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}}$$

Отметим, что при любом μ $l < R$, то есть проскальзывание всегда начинается раньше, чем тело ударится о поверхность большого цилиндра.

Задача 2. Вещества X и Y *(А. Н. Аполонский)*

При изобарическом плавлении температура определяется условием равновесия фаз и не меняется. Изменение давления в теплоизолированном сосуде является адиабатическим процессом. Следовательно, если процесс, проведенный в первом сосуде, объединить с обращенным процессом, проведенном во втором сосуде, мы получим цикл Карно. В этом цикле, Q_1 — это теплота, подведенная от нагревателя,

$$Q_1 - Q_2 = -(p_B - p_A)\Delta V_{\text{X}} < 0$$

— совершенная работа, T_A — температура нагревателя, а T_B — температура холодильника. Здесь ΔV_{X} — увеличение объема при плавлении

$$\Delta V_{\text{X}} = m\left(\frac{3}{2\rho_{\text{X}}} + \frac{5}{12\rho_{\text{X}}}\right) - m\left(\frac{1}{\rho_{\text{X}}} + \frac{5}{6\rho_{\text{X}}}\right) = \frac{m}{12\rho_{\text{X}}}.$$

Отсюда,

$$p_B = p_A + \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta V_{\text{X}}} = p_A + \frac{12\rho_{\text{X}}(Q_2 - Q_1)}{m}.$$

Из коэффициента полезного действия цикла Карно, определяемого известной формулой

$$\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

можно вычислить T_B:

$$T_B = T_A \frac{Q_2}{Q_1} > T_A.$$

Аналогично для вещества Y получаем:

$$Q_3 - Q_4 = -(p_D - p_C)\Delta V_{\mathrm{X}} > 0,$$

$$\Delta V_{\mathrm{Y}} = m\left(\frac{3}{2\rho_{\mathrm{Y}}} + \frac{5}{8\rho_{\mathrm{Y}}}\right) - m\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{Y}}} + \frac{5}{4\rho_{\mathrm{Y}}}\right) = -\frac{m}{8\rho_{\mathrm{Y}}},$$

$$p_D = p_C + \frac{8\rho_{\mathrm{Y}}(Q_3 - Q_4)}{m},$$

$$T_D = T_C \frac{Q_4}{Q_3} < T_C.$$

Задача 3. Зачем нужны диоды *(А. Н. Аполонский)*

При замыкании ключа в положение 1, конденсаторы подключены к источнику параллельно и заряжаются до напряжения U_0 каждый (рис. 34). Заряд конденсаторов при этом $q_0 = CU_0$.

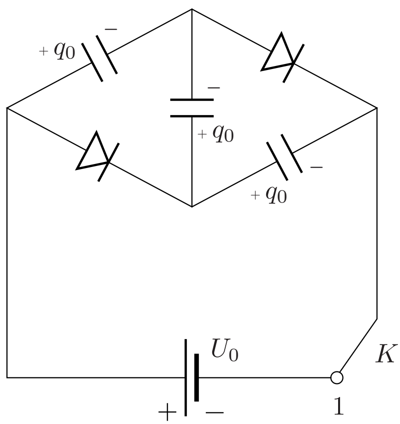

Рис. 34

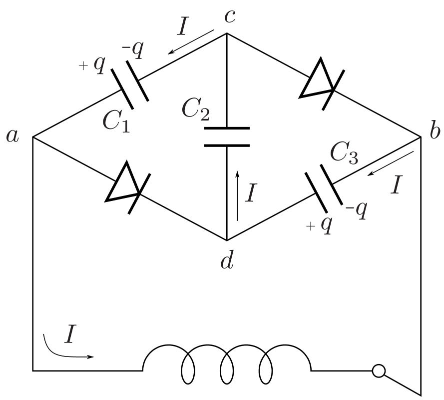

Рис. 35

Рассмотрим начальный этап колебаний. Ток при этом течёт в направлениях, указанных на (рис. 35), напряжения на C_1 и C_3 уменьшаются, на C_2 —

увеличивается. Потенциал φ_d точки d больше потенциала φ_a точки a, φ_b больше, чем φ_c, ток через диоды не течет.

Пусть в момент времени t заряд конденсаторов C_1 и C_3 равен $q(t)$ ($t = 0$ при переключении ключа в положение 2), $q(0) = q_0$. Тогда протекший через индуктивность заряд $\Delta q = q_0 - q$, а на конденсаторе C_2 заряд $q_2 = 2q_0 - q$. Для контура $abdca$

$$L\dot{I} = \frac{q}{C} - \frac{2q_0 - q}{C} + \frac{q}{C}$$

Учитывая, что $I = -\dot{q}$, получаем

$$-L\ddot{q} = \frac{3q}{C} - \frac{2q_0}{C} \quad \Rightarrow \quad L\ddot{q} + \frac{3}{C}\left(q - \frac{2}{3}q_0\right) = 0$$

Заменив $q - \frac{2}{3}q_0 = q_1$, учитывая, что $\ddot{q} = \ddot{q}_1$, получим

$$L\ddot{q}_1 + \frac{3}{C}q_1 = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, причём при $t = 0$ $q_1(0) = q_0/3$. Решение этого уравнения $q_1(t) = q_1(0)\cos\omega t = \frac{q_0}{3}\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{3/LC}$.

Для заряда $q(t)$ имеем

$$q(t) = q_1(t) + \frac{2}{3}q_0 = q_0\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\omega t\right).$$

Качественный график $I(t)$ — синусоида симметричная относительно оси времени и выходящая из начала координат.

Ток через индуктивность при этом меняется по гармоническому закону

$$I(t) = -\dot{q} = \frac{\omega q_0}{3}\sin\omega t$$

Для заряда $q_2(t)$ конденсатора C_2 имеем

$$q_2(t) = 2q_0 - q(t) = q_0\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos\omega t\right). \tag{5}$$

При $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$ ток через индуктивность становится равен 0, затем течёт в обратном направлении. Однако диоды по-прежнему «закрыты», так как $\varphi_d > \varphi_a$ и $\varphi_b > \varphi_c$, поэтому в колебаниях участвует всё та же последовательная цепочка и все ранее выписанные уравнения для колебаний остаются справедливыми. По истечении полного периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$

ток прекращается, конденсаторы возвращаются в исходное состояние и процесс повторяется вновь. Таким образом, в процессе колебаний ток через диоды не течет и колебания тока являются гармоническими с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$. Напряжение на конденсаторах C_1 и C_3 в соответствии с (3) меняется в пределах от $\frac{U_0}{3}$ до U_0, на конденсаторе C_2 в соответствии с (5) в пределах от U_0 до $\frac{5U_0}{3}$, знаки зарядов на пластинах всех трех конденсаторов не меняются.

Задача 4. Магнитный шнур *(В. В. Маринюк, С. Е. Муравьев, А. С. Чернов)*

Решение 1.

Шнур расположится в магнитном поле провода так, чтобы энергия его взаимодействия с полем постоянного тока была минимальна. Просуммируем энергии взаимодействия маленьких элементов шнура с полем, получаем

$$W = -kB_1\Delta l_1\cos\varphi_1 - kB_2\Delta l_2\cos\varphi_2 - kB_3\Delta l_3\cos\varphi_3 - \ldots, \qquad (6)$$

где Δl_1, Δl_2, $\Delta l_3, \ldots$ — длины малых элементов, на которые мы разбиваем шнур, B_1, B_2, $B_3, \ldots$ — индукции магнитного поля провода в тех точках, где находятся соответствующие малые элементы шнура, φ_1, φ_2, $\varphi_3, \ldots$ — углы между векторами индукции магнитного поля и соответствующими малыми элементами шнура, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от «силы» магнитов, и потому одинаковый для всех элементов шнура, поскольку он однороден.

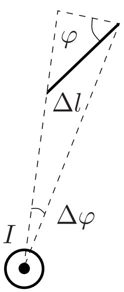

Рис. 36

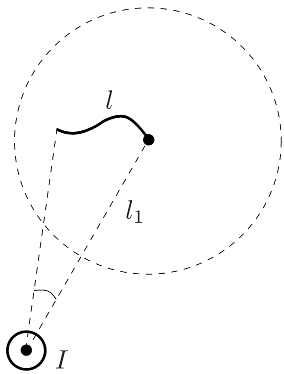

Рис. 37

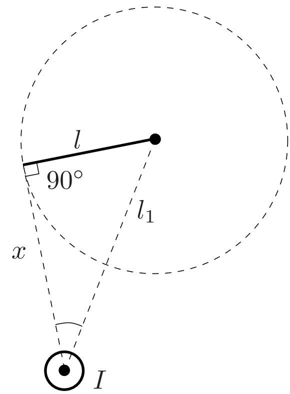

Рис. 38

Для индукции магнитного поля, создаваемого прямым током, имеем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad (7)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, I — сила тока в проводе, r — расстояние от провода до точки наблюдения. Причем вектор $\vec{B}$, модуль которого определен формулой (7), в каждой точке направлен по касательной к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной проводу. Отсюда сразу следует, что весь шнур должен лежать в одной плоскости, перпендикулярной проводу. Действительно, «выход» шнура из этой плоскости увеличит углы между его элементами и вектором индукции, и потому энергетически невыгоден. Подставляя индукцию (7) в формулу (6), получаем

$$W = -\frac{k\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\Delta l_1 \cos\varphi_1}{r_1} + \frac{\Delta l_2 \cos\varphi_2}{r_2} + \frac{\Delta l_3 \cos\varphi_3}{r_3} + \ldots\right), \tag{8}$$

где r_1, r_2, $r_3, \ldots$ — расстояние от провода в тех точках, где находятся соответствующие малые элементы шнура. Минимуму энергии (8) отвечает максимум выражения в скобках.

Каждое слагаемое в скобках выражения (8) соответствует углу $\Delta\alpha_i = \dfrac{\Delta l_1 \cos(\varphi_i)}{r_i}$, под которым виден элемент шнура из точки провода. А, следовательно, сумма в скобках — это угол α, под которым из точки провода виден весь шнур. Таким образом, минимуму энергии шнура отвечает такое его расположение, когда угол α, под которым виден весь шнур из точки провода, лежащей в той же плоскости, что и шнур, максимален. Найдем это положение.

Угол α максимален, когда шнур прямой (рис. 37) и (рис. 38), следовательно расстояние между его концами равно длине провода l. Угол α максимален, когда сам шнур и отрезок, соединяющий его свободный конец перпендикулярны. При этом расстояние от провода до этого конца шнура равно $\sqrt{l_1^2 - l^2}$.

Решение 2.

Шнур расположится в магнитном поле провода так, чтобы энергия его взаимодействия с полем была минимальна. Энергия малого элемента шнура в магнитном поле описывается в точности такой же формулой, что и энергия электрического диполя (системы двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на малом расстоянии Δl друг от друга) в электрическим поле $\vec{E}$. Поэтому при определении равновесного положения шнура во внешнем поле $\vec{B}$ можно заменить его на «цепочку» из диполей в поле $\vec{E}$ такой же конфигурации, что и $\vec{B}$. В этой «цепочке» диполи ориентированы вдоль неё, и противоположные заряды соседних диполей компенсируются. Поэтому «цепочка» из диполей эквивалентна гибкой цепочке с зарядами $+q$ и $-q$ на концах.

Если пренебречь взаимодействием этих зарядов и силой тяжести, то очевидно, что вектор $\vec{E}$ в точке расположения свободного конца цепочки должен быть направлен вдоль цепочки (сила $q\vec{E}$ уравновешивается силой натяжения цепочки). Также ясно, что в состоянии равновесия цепочка, растягиваемая за свободный конец, будет отрезком, проходящим через закреплённый конец и $\vec{E}$. Значит расстояние между его концами равно длине шнура l.

Возвращаясь к шнуру в поле провода, приходим к выводу: шнур будет растянут по прямой в плоскости перпендикулярной проводу и перпендикулярен радиусу, проведённому от оси провода к свободному концу шнура (рис. 38). Значит $x = \sqrt{l_1^2 - l^2}$.

Задача 5. Русалочка *(Л. А. Мельниковский)*

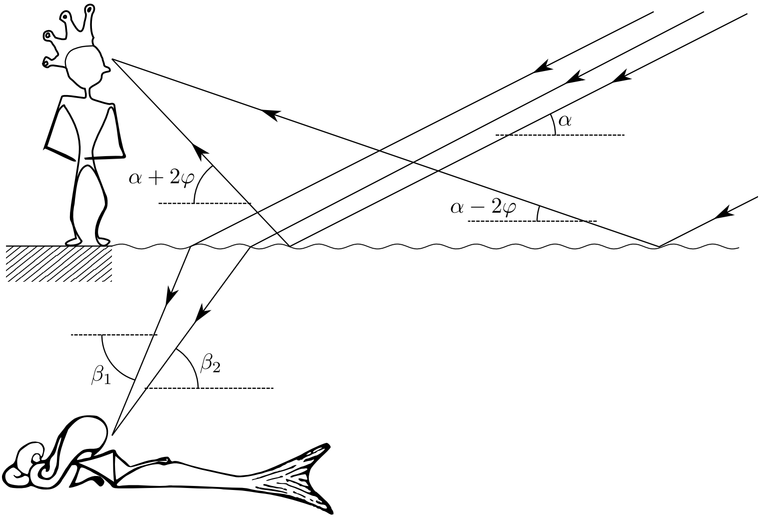

Рис. 39

Обозначим высоту Луны над горизонтом α, а амплитуду наклона поверхности воды φ. Направление лучей, ограничивающих видимую принцем лунную дорожку, определяется углами $\alpha + 2\varphi$ и $\alpha - 2\varphi$ (рис. 39):

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi) = \frac{H}{D_\Pi}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = \frac{H}{D_\Pi + L_\Pi}$$

Отсюда,

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_\Pi} + \operatorname{arctg}\frac{H}{D_\Pi + L_\Pi}\right) \approx 0{,}189$$

$$\varphi = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_\Pi} - \operatorname{arctg}\frac{H}{D_\Pi + L_\Pi}\right) \approx 0{,}078$$

Из закона преломления

$$n\cos(\beta_1-\varphi)=\cos(\alpha-\varphi)\quad \text{и}\quad n\cos(\beta_2+\varphi)=\cos(\alpha+\varphi)$$

Таким образом

$$\beta_1=\arccos\left(\frac{\alpha-\varphi}{n}\right)+\varphi$$

$$\beta_2=\arccos\left(\frac{\alpha-\varphi}{n}\right)-\varphi$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg}\beta_1=\frac{H}{D_P},\quad \operatorname{tg}\beta_2=\frac{H}{D_P+L_P}.$$

получим

$$D_P=H\operatorname{ctg}\beta_1=1{,}67\text{ м},\quad L_P=H\operatorname{ctg}\beta_2-D_P=0{,}48\text{ м}.$$