11 класс

11.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A. *(А. С. Голованов)*

Решение. Возьмём произвольную точку M плоскости и докажем, что $f(M) = 0$. Для этого рассмотрим произвольный треугольник ABC, для которого точка M является точкой пересечения медиан. Обозначим через D, E и F точки пересечения медиан треугольников BCM, CAM и ABM, соответственно (см. рис. 4).

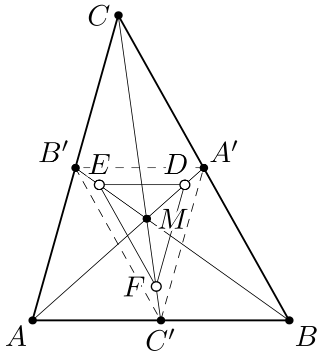

Рис. 4

Заметим, что точка M также является точкой пересечения медиан треугольника DEF. В самом деле, обозначим через A', B' и C' середины отрезков BC, CA и AB, соответственно. Тогда треугольник DEF получается из треугольника ABC гомотетией в точке M с коэффициентом $-\frac{1}{3}$, поскольку при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в $A'B'C'$, а при последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{2}{3}$ — в треугольник DEF.

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$f(M) = f(D) + f(E) + f(F) = (f(M) + f(B) + f(C)) + \\ + (f(M) + f(C) + f(A)) + (f(M) + f(A) + f(B)) = \\ = 2(f(A) + f(B) + f(C)) + 3f(M) = 5f(M),$$

из чего следует, что $f(M) = 0$, что и требовалось доказать.

11.2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay)=1, \\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by)=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? *(М. Антипов)*

Ответ. Нет.

Решение. Покажем, что система не будет иметь решений при $a = 8$, $b = 13$. Действительно, из уравнений системы вытекает, что

$$13x + ay = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 21x + by = \frac{\pi}{2} + \pi \ell$$

при целых k и ℓ. Отсюда следует

$$(21a - 13b)y = 21(13x + ay) - 13(21x + by) = \pi(4 + 21k - 13\ell).$$

При $a = 8$, $b = 13$ получаем $y = (13\ell - 21k - 4)\pi$, а значит, $\mathrm{tg}(ay) = 0$. Поэтому первое уравнение системы не может выполняться.

Замечание. . Числа a и b такие, что $|21a - 13b| = 1$, можно найти, применив алгоритм Евклида к паре взаимно простых чисел $(21, 13)$. На самом деле, в условии задачи можно заменить числа 21 и 13 на любую пару взаимно простых чисел, и ответ не изменится. Можно также заметить, что 13 и 21 — последовательные числа Фибоначчи, поэтому равенство $|21 \cdot 8 - 13 \cdot 13| = 1$ является частным случаем общего факта $|F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2| = 1$.

11.3. Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету? (*М. Дидин*)

Ответ. За $2n - 1$ взвешивание.

Решение. Докажем сначала, что за $2n - 1$ взвешивание можно найти самую тяжёлую монету. Более точно, мы докажем по индукции по n, что самую тяжёлую из $n \geqslant 2$ данных монет можно определить за $2n-1$ взвешивание, имея трое весов, одни из которых, возможно, испорчены.

Если $n = 2$, то взвесим данные две монеты по очереди на трёх разных весах. Если при одном из взвешиваний весы оказались в равновесии, то эти весы испорчены, значит, мы можем определить более тяжёлую монету по показаниям любых из остальных весов. Если равновесия ни разу не было, то какая-то из монет перевесит хотя бы два раза — она и есть более тяжёлая, так как неверный результат могут давать только одни весы. Это даёт базу индукции.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. Выберем две монеты и двое весов и сравним за первые два взвешивания эти монеты друг с другом на первых и на вторых весах. Возможны два случая:

1. Оба раза перевешивала одна и та же из двух монет; назовём её монетой a, а вторую из них — монетой b. Так как хотя бы одни из двух весов правильные, то монета a действительно тяжелее монеты b. Значит, b не самая тяжёлая. Задача сводится к тому, чтобы определить самую тяжёлую из $n-1$ монеты: монеты a и $n-2$ монет, не участвовавших в первых двух взвешиваниях. По предположению индукции мы можем сделать это за $2n-3$ взвешивания. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем $2n-1$ взвешивание.

2. Либо одно из первых двух взвешиваний дало равновесие, либо результаты первых двух взвешиваний противоречат друг другу: один раз перевесила одна монета, а другой — другая. Значит, одни из двух использованных весов точно испорчены. Возьмём третьи весы. Тогда они обязательно правильные. Используя их, мы легко можем определить самую тяжёлую монету за $n-1$ взвешивание: сравниваем первую монету со второй, более тяжёлую из них с третьей, более тяжёлую из них с четвёртой и т. д. до последней. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем $n+1 < 2n-1$ (так как $n > 2$) взвешивание.

Покажем теперь, что менее, чем за $2n-1$ взвешивание, заведомо определить самую тяжёлую монету нельзя. Достаточно показать, что её нельзя определить ровно за $2n-2$ взвешивания, так как можно добавить произвольные взвешивания и игнорировать их результаты. Предположим противное: имеется алгоритм действий, позволяющий определить самую тяжёлую монету за $2n-2$ взвешивания.

Пронумеруем монеты числами $1, \ldots, n$. Сделаем первые $2n-3$ взвешивания согласно алгоритму. Предположим, что в каждом из них перевешивала монета с бóльшим номером. Согласно принципу Дирихле, среди монет с номерами $1, \ldots, n-1$ найдётся такая, которая за произведённые $2n-3$ взвешиваний «проигрывала» (оказывалась более лёгкой) не более одного раза; обозначим номер этой монеты через k. Конечно же, монета с номером n ни разу не «проигрывала». Покажем, что такие результаты взвешиваний возможны. Действительно, такое могло произойти по крайней мере в следующих двух ситуациях.

(А) Монеты упорядочены по возрастанию масс и все весы (в том числе, испорченные) показывали правильные результаты во всех взвешиваниях.

(Б) Монеты упорядочены по возрастанию масс, за исключением монеты номер k, которая самая тяжёлая. При этом те весы, на которых монета номер k «проиграла», испорчены, и в этом взвешивании показали неверный результат, а в остальных взвешиваниях все весы показывали верные результаты.

Рассмотрим два случая.

1. В последнем, $(2n-2)$-м взвешивании, не участвует монета с номером k. Предположим, что опять перевесила монета с бо́льшим номером. Тогда каждая из ситуаций (А) и (Б) по-прежнему возможна.

2. В последнем взвешивании участвует монета с номером k. Предположим, что она перевесила. Тогда, с одной стороны, возможно, что имеет место ситуация (А), и последнее взвешивание выполнялось на испорченных весах. С другой стороны, возможно, что имеет место ситуация (Б), и в последнем взвешивании весы показали правильный результат.

Итак, каким бы ни было одно оставшееся взвешивание, его результат может быть таков, что после него каждая из ситуаций (А) и (Б) будет по-прежнему возможной. Тогда каждая из монет k и n может быть самой тяжёлой, то есть нам не удалось определить самую тяжёлую монету.

11.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K — точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L — точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

(*Ф. Бахарев*)

Решение. Отметим точки K_1 и L_1 касания вписанной сферы ω тетраэдра с гранями ACD и BCD соответственно, а также точки K_2 и L_2 касания сфер ω_B и ω_A с этими гранями. Сферы ω и ω_A гомотетичны с центром в точке A, поэтому точка K_1 лежит на отрезке AK. Аналогично, точка L_1 лежит на отрезке BL.

Покажем, что точки L_1 и L_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD, то есть $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$, $\angle DBL_1 = \angle CBL_2$ и $\angle CDL_1 = \angle BDL_2$. Докажем первое из этих равенств; остальные два доказываются аналогично. Обозначим через M_1 и M точки касания плоскости ABC со сферами ω и ω_A соответственно (см. рис. 5). Из равенства отрезков касательных, проведённых из одной точки к сфере, следует, что следующие пары треугольников равны по трём сторонам: $\triangle CK_1D = \triangle CL_1D$, $\triangle AK_1C = \triangle AM_1C$, $\triangle BL_1C = \triangle BM_1C$, $\triangle CL_2D = \triangle CKD$, $\triangle BL_2C = \triangle BMC$, $\triangle AKC = \triangle AMC$. Значит, $\angle BCL_1 + \angle BCL_2 = \angle BCM_1 + \angle BCM = \angle ACM - \angle ACM_1 = \angle ACK - \angle ACK_1 = \angle DCK_1 + \angle DCK = \angle DCL_1 + \angle DCL_2$, откуда следует требуемое равенство $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$.

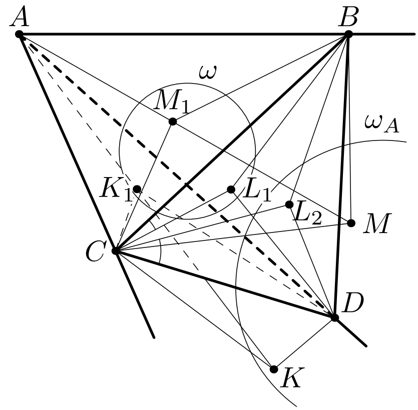

Рис. 5

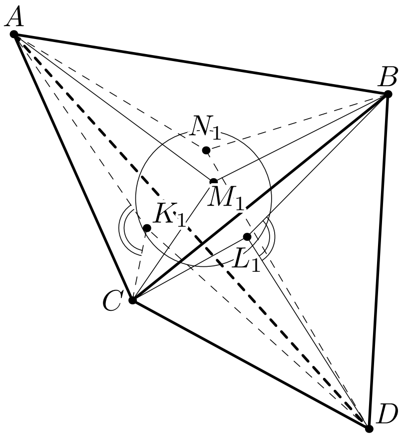

Рис. 6

Используя условие задачи и доказанную изогональную сопряжённость точек L_1 и L_2, получаем, что $\angle CXD = \angle CKD - \angle CBD = \angle CL_2D - \angle CBD = \angle BCL_2 + \angle BDL_2 = \angle DCL_1 + \angle CDL_1 = 180^\circ - \angle CL_1D = 180^\circ - \angle CK_1D$. Следовательно, четырёхугольник CK_1DX вписанный. Аналогично устанавливается вписанность четырёхугольника CL_1DY.

Обозначим через N_1 точку касания сферы ω и грани ABD. Из равенства треугольников $\triangle AK_1C = \triangle AM_1C$ и равенства аналогичных пар треугольников, примыкающих к пяти остальным рёбрам тетраэдра $ABCD$, получаем (см. рис. 6), что $2\angle AK_1C = \angle AK_1C + \angle AM_1C = (360^\circ - \angle AK_1D - \angle CK_1D) + (360^\circ - \angle AM_1B - \angle BM_1C) = 360^\circ - \angle AN_1D - \angle CL_1D + 360^\circ - \angle AN_1B - \angle BL_1C = \angle BL_1D + \angle BN_1D = 2\angle BL_1D$. Так как точки K_1 и L_1 лежат на отрезках AX и BY соответственно, отсюда следует, что $\angle CK_1X = \angle DL_1Y$.

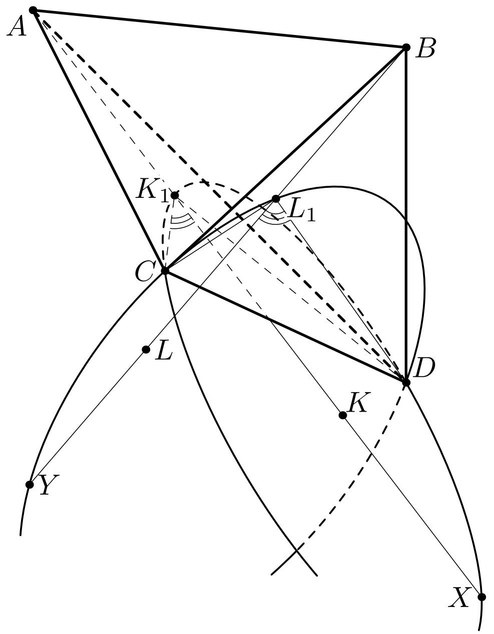

Рис. 7

Повернём плоскость BCD вокруг прямой CD так, чтобы она совместилась с плоскостью ACD и при этом треугольник CL_1D совместился с равным ему треугольником CK_1D. При этом повороте окружность, описанная около четырёхугольника CL_1DY, перейдёт в окружность γ, описанную около четырёхугольника CK_1DX. В частности, точка Y перейдёт в некоторую точку Y' на окружности γ. Из равенства углов $\angle CK_1X = \angle DL_1Y = \angle DK_1Y'$ следует, что точки X и Y' симметричны относительно диаметра окружности γ, перпендикулярного хорде CD. Следовательно, точки X и Y', а значит, и точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

11 класс

11.5. Радиусы пяти концентрических окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$? (*И. Богданов*)

Ответ. При $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. Можно считать, что $q \geqslant 1$. Пусть радиус ω_i равен $R_i = Rq^i$.

Выберем некоторое положительное ℓ и попытаемся построить требуемую ломаную с отрезками длины ℓ, стартуя с произвольной точки $A_0 \in \omega_0$. Пусть точка $A_i \in \omega_i$ уже построена. Расстояния от неё до точек окружности ω_{i+1} пробегают отрезок $[R_{i+1} - R_i, R_{i+1} + R_i]$, то есть $[Rq^i(q-1), Rq^i(q+1)]$. Точку A_{i+1} можно построить тогда и только тогда, когда ℓ принадлежит этому отрезку. Значит, ломаную удастся построить тогда и только тогда, когда $Rq^i(q-1) \leqslant \ell \leqslant Rq^i(q+1)$ при всех $i = 0, 1, 2, 3$.

Поскольку $q \geqslant 1$, эта система неравенств равносильна неравенствам $Rq^3(q-1) \leqslant \ell \leqslant R(q+1)$. Длина ℓ, удовлетворяющая им, существует тогда и только тогда, когда $q^3(q-1) \leqslant q+1$, то есть $q^4 - q^3 - q - 1 \leqslant 0$, или $(q^2-q-1)(q^2+1) \leqslant 0$. Наибольшее значение q, удовлетворяющее этому неравенству, есть $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

11.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Продлим отрезок AM на его длину за точку M, получим точку N такую, что $ADNT$ — параллелограмм. Поскольку $\angle ANT = \angle CAM$, для решения задачи достаточно показать, что $\angle AKT = \angle ANT$, или что точки A, T, N, K лежат на одной окружности (см. рис. 3).

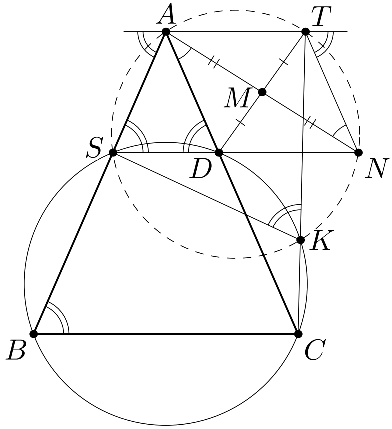

Рис. 3

Пусть ND пересекает AB в точке S; тогда $DS \parallel BC$, и $BSDC$ — равнобокая трапеция. Мы докажем, что точки K и N лежат на окружности ω, описанной около треугольника AST.

Имеем $\angle ATN = \angle ADN = 180^\circ - \angle SDA = 180^\circ - \angle ASD$, значит, N лежит на окружности ω. Из окружности, описанной около трапеции $BSDC$, имеем $\angle SKT = \angle SBC = 180^\circ - \angle SAT$, поэтому K лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

11.7. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, ... есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный. (*М. Антипов*)

Решение. Заметим сразу, что при каждом натуральном b в последовательности a_0, a_1, a_2, ... встретится бесконечно много b-х степеней натуральных чисел, больших единицы. Действительно, если их количество конечно, и наибольшая из них — это $N = x^b$, то в последовательности не встретится ни одной Nb-й степени, что невозможно.

Положим $d_k = a_{k+1} - a_k$; тогда $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Поскольку все коэффициенты многочлена целые, из $a \equiv$

$\equiv a' \pmod{d_k}$ следует $P(a) \equiv P(a') \pmod{d_k}$. Отсюда непосредственной индукцией по s получаем, что $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, то есть $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ при всех $s \geqslant 0$.

Лемма. $a_k(a_k - 1)$ *делится на* d_k.

Доказательство. Пусть p^ℓ — максимальная степень простого числа p, делящая d_k; достаточно показать, что $a_k(a_k - 1)$ делится на p^ℓ. Положим $b = p^{\ell-1}(p-1)\ell$; согласно замечанию выше, найдётся такой индекс $s > k$, что $a_s = m^b$ при натуральном m; при этом $a_s \equiv a_k \pmod{p^\ell}$.

Если m не делится на p, то по теореме Эйлера $a_s = \left(m^{p^{\ell-1}(p-1)}\right)^\ell \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{p^\ell}$, откуда $a_k \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. Если же m делится на p, то a_s делится на p^ℓ, а значит, и a_k тоже. В любом случае $a_k(a_k - 1)$ делится на p^ℓ, что и требовалось. $\square$

Согласно лемме, для любого k число $a_k(a_k - 1)$ делится на $d_k = P(a_k) - a_k$; при этом по условию среди целых чисел a_k бесконечно много различных. В частности, $|x(x-1)| \geqslant |Q(x)|$ при бесконечном количестве целых значений x (где $Q(x) = P(x) - x$).

Предположим теперь, что степень многочлена $P(x)$ (и, как следствие, многочлена $Q(x)$) больше 1. Тогда неравенство выше может выполняться для бесконечно многих целых x лишь тогда, когда $Q(x)$ — квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом ± 1, то есть $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$. В этом последнем случае значения многочлена $Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$ делятся на $Q(x)$ для бесконечного количества целых x; это может быть лишь если $Q(x) = \pm x(x-1)$, то есть $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В первом случае $a_k = n^{2^k}$, то есть a_k не может быть нечётной степенью натурального числа, если n не является таковой степенью. Во втором случае $P(x) \leqslant 1$ при всех x, то есть $P(x)$ не может быть степенью натурального числа, большего 1. В обоих случаях условие задачи не выполнено; значит, $P(x)$ линеен.

11.8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным? (*И. Богданов*)

Ответ. $(n+1)n^2$.

Решение. Введём систему координат так, чтобы центры кубиков имели координаты от 1 до $3n$ по каждой оси. Каждому кубику присвоим координаты его центра. Таким образом, кубик чёрный тогда и только тогда, когда все его координаты дают остаток 2 при делении на 3.

Окрасим красным все белые кубики с координатами (a,b,c), где a делится на 3, а $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$, а также все кубики с координатами $(1,b,c)$, где $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$. Нетрудно видеть, что получилось $(n+1)n^2$ красных кубиков, и требования задачи выполнены. Осталось показать, что добиться требуемого нельзя, окрасив менее $(n+1)n^2$ кубиков.

При $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $w_{3i} = i$, $w_{3i-1} = 0$, $w_{3i-2} = n+1-i$; последовательность (w_i) выглядит так: $n, 0, 1, n-1, 0, 2, n-2, \ldots, 1, 0, n$. Запишем в каждый кубик с координатами (a,b,c) число $w_a w_b w_c$ (в частности, в чёрных кубиках записаны нули). Тогда общая сумма всех чисел, записанных в белых кубиках, окажется равной $\Sigma = (w_1 + \ldots + w_{3n})^3 = n^3(n+1)^3$.

Назовём *ценой* $S(X)$ кубика X сумму чисел во всех кубиках, имеющих с ним общую вершину (включая сам X). Тогда в любой окраске, удовлетворяющей требованиям, сумма цен красных кубиков не меньше, чем Σ. Докажем теперь, что $S(X) \leqslant (n+1)^2 n$ для любого белого кубика X. Из этого будет следовать, что в красный цвет надо окрасить не менее, чем $\dfrac{\Sigma}{(n+1)^2 n} = (n+1)n^2$ кубиков, что и требовалось.

Пусть (a,b,c) — координаты кубика X. Абсциссы всех кубиков, имеющих с ним общую вершину, равны a или $a \pm 1$; такое же утверждение верно для остальных координат. Поэтому $S(X) = (w_{a-1} + w_a + w_{a+1})(w_{b-1} + w_b + w_{b+1})(w_{c-1} + w_c + w_{c+1})$, где мы полагаем $w_0 = w_{3n+1} = 0$. Осталось заметить. что $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n$, если $t \not\equiv 2 \pmod 3$, иначе $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n+1$. Поскольку не все координаты X дают остаток 2, отсюда следует, что $S(X) \leqslant (n+1)^2 n$.