10 класс

10.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A. *(А. С. Голованов)*

Решение. Возьмём произвольную точку M плоскости и докажем, что $f(M) = 0$. Для этого рассмотрим произвольный треугольник ABC, для которого точка M является точкой пересечения медиан. Обозначим через D, E и F точки пересечения медиан треугольников BCM, CAM и ABM, соответственно (см. рис. 2).

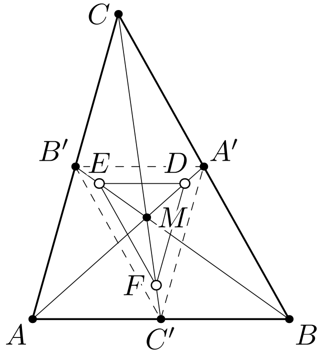

Рис. 2

Заметим, что точка M также является точкой пересечения медиан треугольника DEF. В самом деле, обозначим через A', B' и C' середины отрезков BC, CA и AB, соответственно. Тогда треугольник DEF получается из треугольника ABC гомотетией в точке M с коэффициентом $-\frac{1}{3}$, поскольку при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в $A'B'C'$, а при последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{2}{3}$ — в треугольник DEF.

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$f(M) = f(D) + f(E) + f(F) = (f(M) + f(B) + f(C)) + \\ + (f(M) + f(C) + f(A)) + (f(M) + f(A) + f(B)) = \\ = 2(f(A) + f(B) + f(C)) + 3f(M) = 5f(M),$$

из чего следует, что $f(M) = 0$, что и требовалось доказать.

10.2. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

(*Р. Ефремов, Д. Белов*)

Ответ. Нет, не может.

Первое решение. Приведём алгоритм, позволяющий Паше победить. Пусть масса исходного куска равна 1 кг. Паша каждым ходом будет отрезать от самого большого из имеющихся кусков два куска массой по 0,01 г. Докажем, что не позже, чем через 10 000 ходов Паша победит.

Предположим, что это не так. Рассмотрим 100 последовательных ходов Паши. Всего за эти 100 ходов появятся 200 кусков массой 0,01 г. Если бы каждым своим ответным ходом Вова слеплял два куска массой по 0,01 г, то в итоге получилось бы 100 кусков массой 0,02 г, и Паша бы победил. Значит, по крайней мере один раз Вова не слепит между собой два куска массой 0,01 г. Поэтому спустя 100 ходов Паши и 100 ходов Вовы количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 1.

Разобьём 10 000 ходов Паши на сотни последовательных. По доказанному выше, после каждой сотни последовательных ходов Паши и ответных ходов Вовы количество кусков массы 0,01 г увеличивается хотя бы на 1. Таким образом, через 100 таких сотен последовательных ходов количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 100. Поэтому Паша так или иначе победит.

Второе решение. Опять же положим массу исходного куска равной 1 кг. Приведём другой алгоритм действий Паши. Пока это возможно, он будет добиваться выполнения следующего условия: $(*)$ массы всех кусков на столе составляют целое число граммов. Заметим, что Вова своим ходом не может нарушить $(*)$.

Если перед ходом Паши на столе есть кусок массой хотя бы 3 г, он может отрезать от него два куска по 1 г, сохраняя $(*)$. Значит, если Паша не может сделать ход, каждый кусок весит либо 1 г, либо 2 г (такой момент обязательно наступит, так как количество кусков перед ходом Паши растёт). Но тогда он уже выиграл: в противном случае общая масса всех кусков (в граммах) меньше $1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300$, что не так.

10.3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью

101, 102, ..., 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения? (*Д. Белов, А. Сафиуллина*)

Ответ. 8824.

Решение. Предположим, что при 8824 постояльцах директор не может осуществить переселение. Разобьём комнаты на пары по вместимости: $101-200$, $102-199$, ..., $150-151$. Отметим, что для каждой пары комнат суммарное количество человек, живущих в двух комнатах, больше, чем вместимость большей комнаты из пары, иначе всех человек из этой пары можно было бы собрать в комнате с большей вместимостью. Таким образом, общее количество человек не меньше $201 + 200 + 199 + \ldots + 152 = 353 \cdot 25 = 8825$. Поэтому при 8824 постояльцах директор может освободить комнату.

Теперь приведём пример, доказывающий, что при 8825 и более постояльцах существует расселение, в котором освободить комнату указанным образом не удастся.

Упорядочим комнаты по возрастанию вместимости. Пусть в первых пятидесяти комнатах живёт по 76, а в комнате вместимости k при $151 \leqslant k \leqslant 200$ живёт $k-75$ человек. Посчитаем количество человек, живущих в гостинице:

$$76 \cdot 50 + (76 + 77 + 78 + \ldots + 125) =$$
$$= 3800 + 201 \cdot 25 = 3800 + 5025 = 8825.$$

Рассмотрим две произвольные комнаты вместимости $a < b$. Заметим, что в комнате вместимости b живёт не меньше $b - 75$ человек, а в комнате a — не меньше 76 человек. Таким образом, переселить людей из одной комнаты в другую ни для какой пары комнат не удастся, поэтому пример подходит. Если $n > 8825$, то достаточно селить оставшихся людей поочерёдно в любые комнаты, где ещё остаются свободные места.

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

(*Д. Прокопенко*)

Решение. Используя окружности $(PABC)$ и (PA_1B_1C), получаем $\angle PAB = 180° - \angle PCB = \angle PA_1B_1$ и аналогично $\angle PBA = \angle PB_1A_1$. Тем самым, $\triangle PAB \sim \triangle PA_1B_1$. Из этого подобия вытекает, что $\angle APA_1 = \angle APB \pm \angle BPA_1 = \angle BPB_1$ и $PA/PA_1 = PB/PB_1$. Следовательно $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$, и существует поворотная гомотетия h с центром P, переводящая $\overrightarrow{AA_1}$ в $\overrightarrow{BB_1}$. Угол поворота для h равен $\angle APB = \angle ACB$ (см. рис. 3).

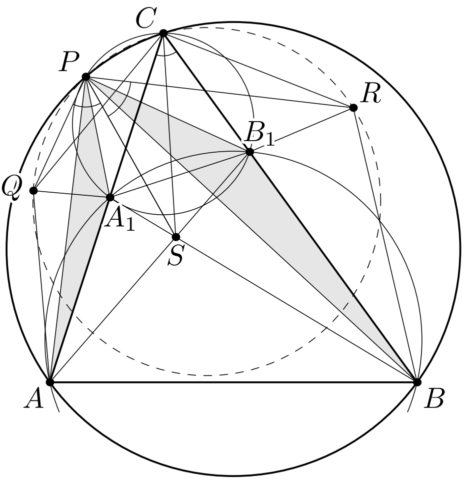

Рис. 3

Треугольник A_1QA равен треугольнику A_1SA, который в свою очередь подобен треугольнику B_1SB (так как AA_1B_1B — вписанный). Итак, треугольники A_1QA и B_1SB подобны и одинаково ориентированы, поэтому $S = h(Q)$ и, значит, $\angle QPS = \angle ACB$. Аналогично, $\angle SPR = \angle ACB$. Тогда $\angle QPR = 2\angle ACB$.

Но $\angle QCR = \angle QCA + \angle ABC + \angle BCR = \angle ACS + \angle ABC +$

$+ \angle SCB = 2\angle ABC$. Итак, мы доказали равенство $\angle QPR = \angle QCR$, из которого следует утверждение задачи.

Замечание 1. Фактически в решении используется известное описание точки Микеля четверки прямых AB, CA, BC, A_1B_1 как центра поворотной гомотетии, переводящей $\overrightarrow{AA_1}$ в $\overrightarrow{BB_1}$.

Замечание 2. Равенства углов $\angle QPS = \angle ACB = \angle SPR$ можно доказать разными способами. Укажем ещё одну из возможных схем.

Пусть Q_1 и R_1 — проекции S на CA и CB соответственно. Можно показать, что точки C, P, Q_1, R_1, S лежат на одной окружности Γ с диаметром CS. Прямые CP, A_1B_1 и AB — радикальные оси трёх окружностей из условия, они пересекаются в одной точке S'. Отсюда несложно понять, что четвёрка прямых CA, CP, CB, CS гармоническая. Проецируя из C на Γ, получаем, что SQ_1PR_1 гармонический. Отсюда $PR_1/R_1S = PQ_1/Q_1S = PQ_1/Q_1Q$, откуда $\triangle PQ_1S \sim \triangle PR_1R$ (а также $\triangle PQ_1Q \sim \triangle PR_1S$), из чего следуют нужные равенства углов.

10 класс

10.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное: пусть прямоугольники имели размеры $k \times \ell$, где $\ell < k$. Пусть a_i — длина стороны квадрата у i-го ребёнка. Тогда каждая сторона прямоугольника составлена из нескольких отрезков длиной a_i, то есть $\ell = b_i a_i$ и $k = c_i a_i$, где b_i и c_i — натуральные числа. При этом у ребёнка получилось $b_i c_i$ квадратиков.

Заметим, что $1 < k/\ell = c_i/b_i$, то есть число k/ℓ рационально. Пусть s/t — его несократимая запись; тогда $s > 1$, и c_i делится на s при всех i. Значит, и число квадратиков у i-го ребёнка делится на s. Тогда общее число квадратиков Q также делится на $s > 1$, и притом $Q > s$ (поскольку количество детей больше 1). Значит, Q — составное число; противоречие.

10.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E — соответственно середины меньших дуг AB и BC окружности ω, описанной около треугольника ABC. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E — точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90^\circ$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ACB = 2\gamma$. Не умаляя общности считаем, что $\alpha \geqslant \gamma$. Поскольку точки D и E — середины дуг AB и AC окружности ω, имеем $\angle ABD = \frac{\angle ACB}{2} = \gamma$ и $\angle CBE = \alpha$.

Обозначим через M и N середины сторон AB и BC соответственно (см. рис. 2). Тогда MN — средняя линия треугольника ABC, она параллельна стороне AC и проходит через середину K отрезка BL. Также $\angle AMK = 180^\circ - \angle MAC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BNK = \angle BCA = 2\gamma$.

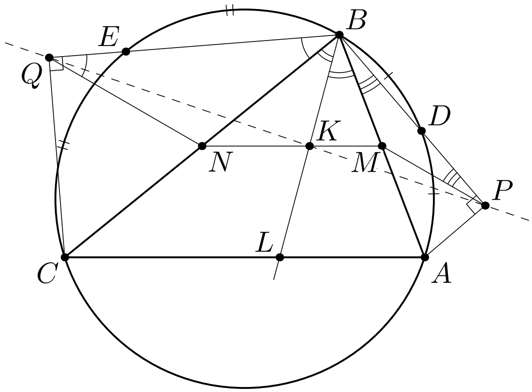

Рис. 2

Пусть $BM = MA = c$, $BN = NC = a$. Отрезок MP является медианой в прямоугольном треугольнике APB, поэтому $MP = c$ и $\angle MPB = \angle MBP = \gamma$; аналогично, $NQ = a$ и $\angle NQB = \alpha$. Следовательно, $\angle QNK = \angle BNK + \angle BNQ = 2\gamma + 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle PMK = \angle AMK + \angle PMA = 180^\circ - 2\alpha + 2\gamma$. Так как $\alpha \geqslant \gamma$, то либо точки P и Q лежат на прямой MN, и в таком случае задача уже решена, либо точка P лежит в той же полуплоскости, что и точка A относительно прямой MN, а точка Q — в другой полуплоскости.

Заметим, что BK — биссектриса треугольника BMN, поэтому $MK/KN = c/a = MP/QN$. Вместе с равенством $\angle PMK = \angle QNK$ это означает, что треугольники PMK и QNK подобны. Значит, $\angle MKP = \angle NKQ$. Поскольку к тому же точки P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MN, точки P, M и K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

10.7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *несыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, может.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Выделим трёх школьников. Будем называть сыгранными команды, в которых содержится 1 или 3 выделенных школьника, а остальные — несыгранными.

Выделенные школьники могут либо оказаться в трёх разных командах, и тогда мы получим три сыгранные команды и одну несыгранную, либо оказаться все в одной команде, и мы получим одну сыгранную и три несыгранные, либо двое могут оказаться в одной команде и один в другой, в этом случае мы также получаем одну сыгранную и три несыгранные команды. Таким образом, все условия соблюдаются.

Замечание. Также подходят все примеры, когда выделено нечётное количество школьников, большее 1 и меньшее 23, и все команды, в которых присутствует нечётное количество выделенных школьников, объявляются сыгранными, а все остальные — несыгранными.

10.8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, ... есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный. (*М. Антипов*)

Решение. Заметим сразу, что при каждом натуральном b в последовательности a_0, a_1, a_2, ... встретится бесконечно много b-х степеней натуральных чисел, больших единицы. Действительно, если их количество конечно, и наибольшая из них — это $N = x^b$, то в последовательности не встретится ни одной Nb-й степени, что невозможно.

Положим $d_k = a_{k+1} - a_k$; тогда $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Поскольку все коэффициенты многочлена целые, из $a \equiv a' \pmod{d_k}$ следует $P(a) \equiv P(a') \pmod{d_k}$. Отсюда непосредственной индукцией по s получаем, что $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, то есть $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ при всех $s \geqslant 0$.

Лемма. $a_k(a_k - 1)$ *делится на* d_k.

Доказательство. Пусть p^ℓ — максимальная степень простого числа p, делящая d_k; достаточно показать, что $a_k(a_k - 1)$

делится на p^ℓ. Положим $b = p^{\ell-1}(p-1)\ell$; согласно замечанию выше, найдётся такой индекс $s > k$, что $a_s = m^b$ при натуральном m; при этом $a_s \equiv a_k \pmod{p^\ell}$.

Если m не делится на p, то по теореме Эйлера $a_s = \left(m^{p^{\ell-1}(p-1)}\right)^\ell \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{p^\ell}$, откуда $a_k \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. Если же m делится на p, то a_s делится на p^ℓ, а значит, и a_k тоже. В любом случае $a_k(a_k-1)$ делится на p^ℓ, что и требовалось. $\square$

Согласно лемме, для любого k число $a_k(a_k-1)$ делится на $d_k = P(a_k) - a_k$; при этом по условию среди целых чисел a_k бесконечно много различных. В частности, $|x(x-1)| \geqslant |Q(x)|$ при бесконечном количестве целых значений x (где $Q(x) = P(x) - x$).

Предположим теперь, что степень многочлена $P(x)$ (и, как следствие, многочлена $Q(x)$) больше 1. Тогда неравенство выше может выполняться для бесконечно многих целых x лишь тогда, когда $Q(x)$ — квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом ± 1, то есть $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$. В этом последнем случае значения многочлена $Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$ делятся на $Q(x)$ для бесконечного количества целых x; это может быть лишь если $Q(x) = \pm x(x-1)$, то есть $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В первом случае $a_k = n^{2^k}$, то есть a_k не может быть нечётной степенью натурального числа, если n не является таковой степенью. Во втором случае $P(x) \leqslant 1$ при всех x, то есть $P(x)$ не может быть степенью натурального числа, большего 1. В обоих случаях условие задачи не выполнено; значит, $P(x)$ линеен.