Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2017–2018 уч. год.
Школьный этап.

9 класс

1. *(7 баллов)* 45 конфет стоят столько же рублей, сколько их можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?

Ответ: 75 конфет.

Решение. Пусть x — стоимость одной конфеты в рублях. Тогда $45x = \frac{20}{x}$, откуда $x = \frac{2}{3}$. Тогда на 50 рублей можно купить $\frac{50}{x} = 75$ конфет.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Верно составлено уравнение $45x = \frac{20}{x}$, но при его решении или в дальнейшем допущена арифметическая ошибка: 5 баллов.
В решении утверждается, что цена одной конфеты равна $\frac{2}{3}$, проверяется, что такая стоимость подходит в условие задачи, и получен верный ответ: 4 балла.
Приведён только верный ответ: 1 балл.

2. *(7 баллов)* Женя расставил по кругу числа от 1 до 10 в некотором порядке, а Дима в каждой промежуток между числами вписал их сумму. Могло ли так случиться, что все написанные Димой числа оказались различными?

Ответ: Могло.

Пример расстановки чисел изображён ниже.

1 2
10 3
9 4
8 5
6 7

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Приведён только верный ответ или верный ответ и неправильный пример: 0 баллов.

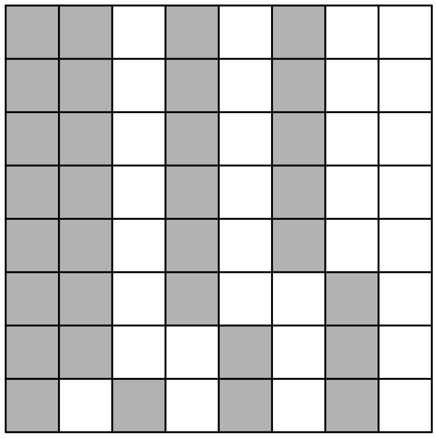
3. *(7 баллов)* Можно ли в некоторые клетки таблицы 8×8 написать единицы, а в остальные — нули, так, чтобы во всех столбцах была разная сумма, а во всех строчках — одинаковая?

Ответ: можно.

Решение. Пусть сумма чисел в каждой строчке равна x. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $8x$, то есть общая сумма делится на 8. Заметим, что в столбцах может быть от 0 до 8 единиц. Сумма всех чисел от 0 до 8 равна

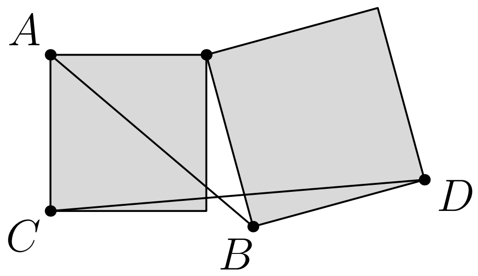
36. Чтобы получить кратное 8 число, нужно из 36 отнять 4. Поэтому в нашем примере не должно быть столбца, в котором ровно 4 единицы.

Пример изображён ниже (есть и другие примеры).



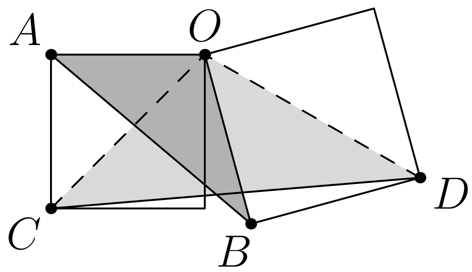
Критерии. Любой верный пример, даже без каких-либо пояснений: 7 баллов.
Доказано, что если во всех столбцах сумма ненулевая, то примера не существует: 4 балла.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.

4. *(7 баллов)* Два квадрата имеют общую вершину. Найдите отношение отрезков AB и CD, показанных на рисунке.



Ответ: $1 : \sqrt{2}$.

Решение. Пусть точка O — общая вершина двух квадратов, а их стороны равны a и b. Диагонали квадратов равны $\sqrt{2}a$ и $\sqrt{2}b$ соответственно. Кроме того, $\angle COD = \angle COB + \angle BOD = \angle COB + 45^\circ = \angle COB + \angle AOC = \angle AOB$. Треугольники AOB и COD подобны по общему углы и пропорциональным сторонам при этом угле.



Следовательно, $AB : CD = 1 : \sqrt{2}$.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Правильно посчитано отношение не AB к CD, а CD к AB (соответственно, ответ $\sqrt{2}$): 7 баллов.
Доказано подобие треугольников AOB и COD, но дальнейший вывод отсутствует или нужное отношение найдено неверно: 6 баллов.
Доказано, что $\angle AOB = \angle COD$, но дальнейшие продвижения отсутствуют: 1 балл.
Рассмотрен только частный случай (например, когда квадраты имеют совпадающую сторону или когда угол между некоторыми сторонами двух квадратов равен $90°$): 0 баллов.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.

5. *(7 баллов)* Числа a, b, c и d таковы, что $a+b = c+d \neq 0, ac = bd$. Докажите, что $a + c = b + d$.

Решение. Если $a \neq 0$, то подставим $c = \frac{bd}{a}$, получим

$$a + b = \frac{bd}{a} + d \iff a + b = \frac{d}{a} \cdot (b + a) \iff a = d\,.$$

Отсюда $b = c$ и $a + c = b + d$.

Если же $a = 0$, то $b \neq 0$ (иначе $a + b = 0$), поэтому $d = 0$ (из $ac = bd$). Но тогда равенство $a + b = c + d$ переписывается как $b = c$, откуда следует нужное равенство.

Возможны и другие решения.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
В верном решении рассматривается выражение вида $\frac{bd}{a}$ (или любое аналогичное), но не рассмотрен случай равенства знаменателя нулю: 5 баллов.
Доказано, что $(a+c)^2 = (b+d)^2$, но при этом не разобран случай $(a+c) = -(b + d)$: 3 балла.
Рассмотрен только случай конкретных числовых значений a, b, c, d: 0 баллов.

6. *(7 баллов)* Вдоль трассы стоят 60 дорожных знаков. На каждом из них написана сумма расстояний до оставшихся 59 знаков. Возможно ли такое, что на знаках написаны 60 различных натуральных чисел? (Расстояния между знаками не обязательно целые.)

Ответ: Невозможно.

Решение. Занумеруем знаки последовательно числами от 1 до 60. Докажем, что числа, записанные на знаках с номерами 30 и 31, совпадают. Разобьём оставшиеся знаки на пары вида k и $k + 31$: 1 и 32, 2 и 33, ..., 29 и 60. Заметим, что сумма расстояний как от знака 30, так и от знака 31, до знаков одной пары k и $k + 31$ равна расстоянию между знаками k и $k + 31$. Поскольку число на знаках 30 и 31 равно сумме расстояний до знаков всех 29 пар и расстояния между знаками 30 и 31, то числа на знаках 30 и 31 совпадают.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Утверждается, но не доказывается, что равны числа, написанные на двух средних столбиках (на столбиках 30 и 31): 2 балла.
На примере частных случаев показано, что обязательно найдутся равные числа: 0 баллов.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.