Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2017–2018 уч. год.
Школьный этап.

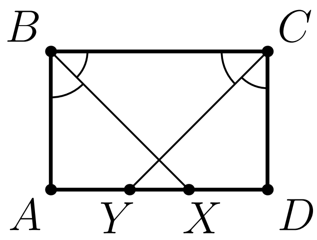
8 класс

1. *(7 баллов)* Представьте число 2017 в виде суммы пяти натуральных чисел так, чтобы все цифры, использованные в этих пяти числах, были различны.

Решение. Один из возможных примеров: $2017 = 1976 + 30 + 4 + 2 + 5$. Есть и другие представления.

Критерии. Предъявлено хотя бы одно правильное представление, даже без каких-либо пояснений: 7 баллов.
Искомого представления не получено: 0 баллов.

2. *(7 баллов)* В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 6, сторона BC равна 11. Из вершин B и C проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону AD в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка XY.



Ответ: 1.

Решение. Углы AXB и XBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BX. Углы XBC и XBA равны, так как BX — биссектриса угла ABC. Получаем, что $\angle AXB = \angle XBA$, откуда следует, что треугольник AXB — равнобедренный, $AB = AX = 6$; $XD = AD - AX = 11 - 6 = 5$. Аналогично получаем, что $AY = 5$. Тогда $XY = AD - AY - XD = 11 - 5 - 5 = 1$.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Доказано, что $AY = 5$, но при этом длина отрезка XY не найдена или найдена неверно: 4 балла.
Доказано, что треугольник ABX равнобедренный и нет дальнейших продвижений: 2 балла.
Приведён только верный ответ: 1 балл.

3. *(7 баллов)* Рыцарский турнир длится ровно 7 дней. К концу четвертого дня сэр Ланселот не успел сразиться лишь с одной четвертью от общего числа участников турнира. А сэр Тристан к этому времени сразился ровно с одной седьмой из тех рыцарей, с кем успел сразиться сэр Ланселот. Какое минимальное количество рыцарей могло участвовать в турнире?

Ответ: 20.

Решение. Пусть Ланселот не сразился с x рыцарями. Тогда общее число рыцарей равно $4x$, а сразился Ланселот с $3x-1$ рыцарем (общее количество за вычетом x и самого Ланселота). Тогда Тристан сразился с $\frac{3x-1}{7}$ рыцарей. Чтобы найти наименьшее возможное количество рыцарей, необходимо подобрать минимальное x такое, что $3x-1$ делится на 7. Значения $x = 1, 2, 3, 4$ не подходят, а $x = 5$ подходит. Таким образом, наименьшее возможное число рыцарей равно 20.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
За отсутствие обоснования того, что действительно могло быть ровно 20 рыцарей, баллы не снимаются.
Приведён только верный ответ: 2 балла.

4. *(7 баллов)* Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8. Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 0 или 64.

Решение. Предположим, что в каждом квадрате 2×2 стоит m фигур, а в каждом прямоугольнике 1×3 — n фигур. Выделим из доски какой-нибудь прямоугольник 2×6. С одной стороны, этот прямоугольник можно разбить на три квадрата 2×2, и значит в нём $3m$ фигур. С другой стороны, его можно разрезать на четыре прямоугольника 1×3, и тогда в нём $4n$ фигур. Получаем соотношение $3m = 4n$, откуда n делится на 3. Но n может принимать значения $0, 1, 2, 3$. Таким образом, $n = 0$ или $n = 3$. Иными словами, либо все прямоугольники 1×3 пустые, и тогда на доске стоит 0 фигур, либо все прямоугольники 1×3 полностью заняты фигурами, и в этом случае на доске стоят 64 фигуры.

Критерии: Любое верное решение: 7 баллов.
Пропущен случай нуля фигур, в остальном решение верное: 6 баллов.
Доказано, что все прямоугольники 1×3 (или все квадраты 2×2) пустые или заполненные, но решение не завершено: 5 баллов.
Приведён только верный ответ: 1 балл.

5. *(7 баллов)* Три школьницы зашли в магазин. Аня купила 2 ручки, 7 карандашей и 1 блокнот, Варя — 5 ручек, 6 карандашей и 5 блокнотов, Саша — 8 ручек, 4 карандаша и 9 блокнота. Все заплатили поровну, но одна при оплате воспользовалась скидкой. Кто? (Объясните свой ответ).

Ответ: Варя.

Решение. Обозначим символами Р, К, Б стоимости ручки, карандаша и блокнота соответственно. Обозначим также суммарную стоимость покупок (без учёта скидки) Ани, Вари и Саши символами A, B, C. По условию,

$$A = 2\text{Р} + 7\text{К} + 1\text{Б};\ B = 5\text{Р} + 6\text{К} + 5\text{Б};\ C = 8\text{Р} + 4\text{К} + 9\text{Б}.$$

Сложим выражения для A и C и сравним результат с $2B$:

$$A + C = 10\text{Р} + 11\text{К} + 10\text{Б} < 10\text{Р} + 12\text{К} + 10\text{Б} = 2B.$$

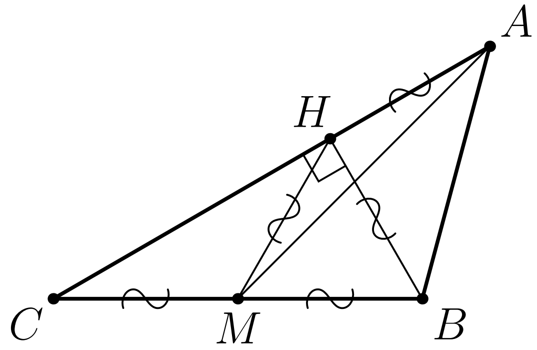
Получили, что $A + C < 2B$, откуда следует, что стоимость покупок Вари больше, чем стоимость покупок хотя бы одной из остальных девочек, а значит скидкой могла воспользоваться только Варя.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Приведён только верный ответ: 1 балл.
Рассмотрен только случай конкретных цен на ручки, карандаши и блокноты: 0 баллов.

6. *(7 баллов)* В треугольнике ABC провели медиану AM. Найдите угол AMC, если углы BAC и BCA равны $45°$ и $30°$ соответственно.

Ответ: $135°$.

Решение. Пусть BH — высота треугольника ABC. По условию угол BAC равен $45°$, поэтому $BH = AH$. В треугольнике CBH катет BH лежит против угла $30°$, поэтому $BC = 2BH$. Медиана HM прямоугольного треугольника BHC равна половине гипотенузы BC.



Собирая все равенства отрезков воедино, получаем $AH = BH = HM = MB = MC$. Значит, треугольник MBH равносторонний, и угол CMH равен $120°$. Кроме того, треугольник AHM равнобедренный, его угол AHM равен $90° + 60° = 150°$, поэтому угол AMH равен $15°$. Таким образом,

$$\angle AMC = \angle AMH + \angle HMC = 120° + 15° = 135°.$$

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Доказано, что треугольник AHM равнобедренный, но правильный ответ не получен: 5 баллов.
Приведён только верный ответ: 1 балл.