Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2017–2018 уч. год.
Школьный этап.

11 класс

1. *(7 баллов)* В трёхзначном числе первую цифру (разряд сотен) увеличили на 3, вторую — на 2, третью — на 1. В итоге число увеличилось в 4 раза. Приведите пример такого исходного числа.

Ответ: 107.

Решение. Ответ может быть найден следующим способом. Пусть x — искомое число. Тогда условие задачи мгновенно приводит к уравнению $x + 321 = 4x$, единственным решением которого служит $x = 107$.

Критерии. Правильный ответ, даже без каких-либо комментариев: 7 баллов.
Неправильный ответ: 0 баллов.

2. *(7 баллов)* Билет в кино стоил 300 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50 процентов, а выручка кинотеатра выросла на 35 процентов. Сколько рублей составляет цена одного билета теперь?

Ответ: 270.

Решение. Пусть цена нового билета составляет s рублей. Пусть изначально количество посетителей равнялось N, а после увеличения на 50% стало равняться $1{,}5N$. Тогда по условию нынешняя выручка кинотеатра $1{,}5N \cdot s$ на 35% больше, чем $N \cdot 300$, откуда имеем $1{,}5Ns = 1{,}35 \cdot N \cdot 300$, и $s = 270$.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.
Приведен только верный ответ: 1 балл.

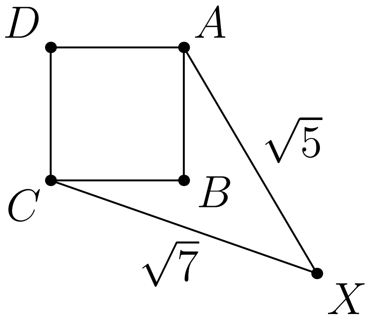
3. *(7 баллов)* Дана арифметическая прогрессия. Сумма первых её 10 членов равна 60, а сумма первых 20 её членов равна 320. Чему может быть равен 15-й член этой прогрессии?

Ответ: 25.

Решение. Пусть первый член последовательности равен a, а разность равна b. Тогда сумма первых 10 её членов равна $a + (a + b) + \ldots + (a + 9b) = 10a + 45b$. Сумма первых двадцати членов равна $a + (a + b) + \ldots + (a + 19b) = 20a + 190b$. По условию $10a + 45b = 60, 20a + 190b = 320$. Решая систему, находим $a = -3, b = 2$. Тогда 15-й член — это $a + 14b = 25$.

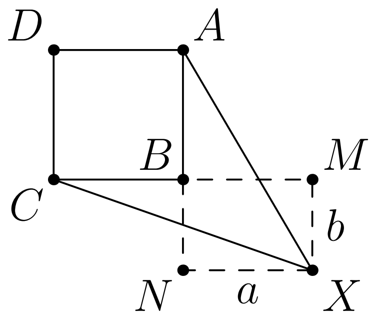
Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.
В целом правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения: 5 баллов.
Только ответ: 1 балл.

4. *(7 баллов)* На плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной 1 и точка X (см. рисунок). Известно, что $XA = \sqrt{5}$, $XC = \sqrt{7}$. Чему равно XB?



Ответ: $\sqrt{6 - \sqrt{10}}$.

Решение. Опустим из точки X перпендикуляры XM и XN на прямые CB и AB соответственно. Четырёхугольник $BMXN$ — прямоугольник; обозначим длины его сторон BM и NX за a, BN и MX — за b.



По теореме Пифагора для треугольников ANX и CMX выполнены соотношения
$$AN^2 + NX^2 = AX^2, CM^2 + XM^2 = CX^2\,.$$

Получаем систему $(1+b)^2 + a^2 = 5$, $(1+a)^2 + b^2 = 7$. Вычтя из второго уравнения первое, получим $2(a-b) = 7-5$, т. е. $a = b+1$. Заменив $b+1$ на a в первом уравнении, получим $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$, откуда $b = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$. Применим теорему Пифагора для треугольника BMX и получим

$$BX^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 = 6 - \sqrt{10}\,.$$

Значит, $BX = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.
В целом правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения: 5 баллов.
Рассуждения, не приводящие к ответу, или логически ошибочные рассуждения: 0 баллов.

5. *(7 баллов)* Рассмотрим уравнение $\sin^3(x) + \cos^3(x) = -1$. Сколько у него решений на промежутке $[0; 6\pi]$?

Ответ: 6.

Решение. Из основного тригонометрического тождества имеем $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Складывая это с данным в условии равенством, получаем

$$0 = \sin^2(x) \cdot (1 + \sin(x)) + \cos^2(x) \cdot (1 + \cos(x)).$$

В этом выражении все множители неотрицательны, поэтому оба слагаемых $\sin^2(x)(1 + \sin(x))$ и $\cos^2(x)(1 + \cos(x))$ равны 0.

Случай 1. Пусть $\sin(x) = 0$. Тогда $\cos(x) \neq 0$, поэтому $\cos(x) = -1$. Тогда $x = \pi + 2\pi k$.

Случай 2. Пусть $\sin(x) \neq 0$. Тогда $\sin x = -1$, откуда следует $\cos(x) = 0$. Тогда $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

Легко видеть, что все числа вида $\pi + 2\pi k$ и $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ являются корнями исходного уравнения. В нужный промежуток попадают три корня первого вида, у которых $k = 0, 1, 2$ и три корня второго вида, у которых $n = 0, 1, 2$. Итого имеем $3 + 3 = 6$ корней.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.
Получены общие формулы для корней, но неправильно посчитано количество корней на отрезке $[0; 6\pi]$: 5 баллов.
Только ответ, даже с предъявленным полным множеством корней: 1 балл.

6. *(7 баллов)* Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AI_A, BI_B, CI_C, DI_D пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть точка L — основание биссектрисы AL треугольника ABC. По свойству биссектрисы, $BL/LC = BA/AC$. Из соотношения на длины рёбер тетраэдра следует, что $BA/AC = BD/DC$. Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $BL/LC = BD/DC$. По обратному свойству биссектрисы отрезок DL служит биссектрисой в треугольнике DBC.

Рассмотрим треугольник ALD. Точки I_D, I_A лежат на его сторонах AL, DL соответственно, так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис. Но тогда отрезки DI_D и AI_A пересекаются. Аналогично можно доказать, что любые два отрезка из условия пересекаются. Эти четыре отрезка не лежат в одной плоскости (поскольку их концы A, B, C, D не лежат в одной плоскости) и при этом попарно пересекаются. Такое возможно только когда они все имеют общую точку.

Критерии. Любое правильное решение: 7 баллов.
Доказано, что отрезки попарно пересекаются, но не доказано, что все

четыре имеют общую точку: 4 балла.
Доказано, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на ребре BC, но дальнейших продвижений нет: 2 балла.
Неверные или не доведенные до конца рассуждения: 0 баллов.