Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2018 г.** (I тур) и **1 февраля 2018 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2017–2018 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017–2018 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:
$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$
Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь
$$\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = d-1,$$
что и требовалось.

11.7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию
$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$
Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная? (*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Подставим в данное равенство $-y$ вместо y. Получим
$$f(x) + f(-y) = 2f\left(\frac{x-y}{2}\right) f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$
Итак, $f(x) + f(y) = f(x) + f(-y)$, откуда для всех действительных y получим $f(y) = f(-y)$. Это и означает, что функция $f(x)$ чётная.

Замечание. Существуют непостоянные функции, удовлетворяющие условию — например, $f(x) = \cos x$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Показано, что $f(0) = 1$ (в предположении, что f не является тождественным нулём) — 0 баллов.

11.8. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

Решение. При $n > 1$ обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \qquad (*)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{2018}$. Предположим, что $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = pk$; из неравенства $(*)$ вытекает, что $k < p-1$. Так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, то $k+1 \geqslant q$; однако $k < p-1 < q-1$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел p и q подходит.

Комментарий. Замечено только, что (в предположении противного) для любого простого $p > 10^{2018}$ число $S(p)$ делится на p — 0 баллов.

В предположении противного доказано, что для любых двух последовательных простых чисел $q > p > 10^{2018}$ число $S(q)$ делится как на p, так и на q — 2 балла.

11.9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 198.

Решение. Переведём задачу на язык графов, сопоставляя ребёнку вершину, а дружбе — ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число рёбер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 рёбрами. Разобьём 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ рёбер.

Осталось доказать, что это количество — наименьшее. Назовём граф на $3k+1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединённых. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k+1$ вершинах хотя бы $6k$ рёбер; при $k=33$ получим требуемую оценку. База при $k=1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальных попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, то есть число рёбер равно $C_4^2=6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество рёбер не меньше, чем $(3k+1)\cdot 4/2 = 2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдётся вершина A, соединённая не более, чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадёт в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, то есть было их не меньше трёх. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, то есть C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединённую со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество рёбер уменьшилось хотя бы на 6 (т. е. на количество рёбер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ рёбер, а значит, в исходном — не менее $6(k-1)+6=6k$ рёбер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y \neq X$. Если её удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определённости, в тройке с B и C, а вершина D — в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B

и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмём 4 вершины и соединим все пары рёбрами. При переходе от k к $k + 1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ рёбер, и он будет удовлетворять условию задачи.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только приведён пример с 198 парами дружащих — 1 балл.

Примеры с бóльшим количеством пар дружащих не оцениваются.

Только доказано, что количество пар дружащих не меньше 198 — 6 баллов.

11.10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер ω_1 и ω_2 соответственно. Отметим (фиксированные) середины S и K отрезков O_1O_2 и AB соответственно, а также (переменные) середины L, M и N отрезков BY, XY и AX соответственно (см. рис. 5). Так как отрезки AX и BY параллельны, отрезок KM также им параллелен. Как известно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, поэтому отрезки KM и LN имеют общую середину T.

Проведём плоскость α через T перпендикулярно AX; так как $KM \parallel AX$, все точки этой плоскости равноудалены от точек K и M. Так как T — середина LN, точки L и N равноудалены от α и лежат по разные стороны от неё (либо обе лежат в α). Так как отрезки O_1N и O_2L перпендикулярны AX, они параллельны α; тогда точки O_1 и O_2 также равноудалены от α, поэтому середина S отрезка O_1O_2 лежит в α. Итак, $SK = SM$.

Таким образом, если точки S и K не совпадают, середина

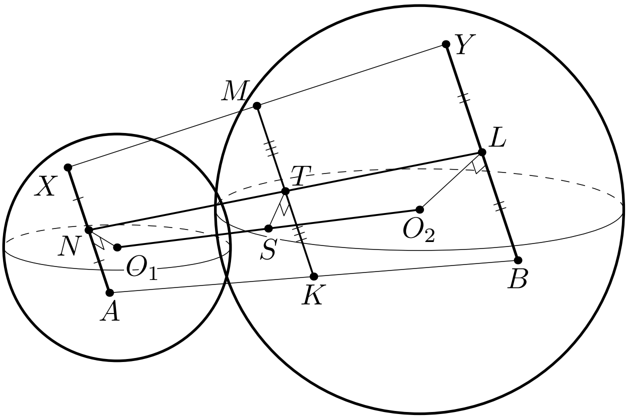

Рис. 5

M отрезка XY лежит на сфере с центром в точке S и радиусом, равным длине отрезка SK. Если же $S = K$, то $S = M$, и середины всех отрезков XY совпадают. В этом случае условию удовлетворяет любая сфера, проходящая через точку S.

Замечание. Равенство $SK = SM$ можно установить и по-другому. При отражении относительно прямой, параллельной AX и BY, векторы $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2B}$ переходят в векторы, равные $\overrightarrow{XO_1}$ и $\overrightarrow{YO_2}$ соответственно. Значит, при таком отражении вектор $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_2B})$ переходит в вектор, равный $\frac{1}{2}(\overrightarrow{XO_1} + \overrightarrow{YO_2}) = \overrightarrow{MS}$. Отсюда и следует, что $SK = MS$.

Комментарий. Верно указаны центр и радиус искомой сферы — 1 балл.

Если во в целом верном решении не разбирается случай, когда искомая сфера вырождается в точку (в приведённом решении это происходит, если $S = K$) — баллы не снимаются.