Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2018 г.** (I тур) и **1 февраля 2018 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2017–2018 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017–2018 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь

$$\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = d-1,$$

что и требовалось.

10.7. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны? (*Методкомиссия*)

Ответ. Неверно.

Решение. Приведем один из возможных примеров. Из двух равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников составим *дельтоид*, приложив их друг к другу равными сторонами, как показано на рис. 3. Каждый из этих двух треугольников разобьем высотой на два равных треугольника. В результате дельтоид окажется составленным из четырех равных прямоугольных треугольников.

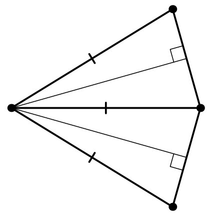

Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Предъявлен любой верный пример, существование которого очевидно из конструкции — 7 баллов.

10.8. Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

(*И. Богданов*)

Ответ. 100 000.

Решение. Разобьём доску на 100^2 квадратов 10×10. Покажем, что в каждом квадрате может стоять не более 10 гепардов, не бьющих друг друга — отсюда будет следовать, что общее число гепардов не может превосходить $100^2 \cdot 10 = 100\,000$.

Рассмотрим произвольный квадрат Q размера 10×10 и произвольного гепарда g в нём. Гепард g бьёт все клетки квадрата, кроме клеток, лежащих с ним в одной строке или в одном столбце. Если один из остальных гепардов g' в квадрате Q стоит в одной строке с g, а ещё один, g'', — в одном столбце с g, то g' и g'' стоят в разных строках и столбцах и, следовательно, бьют друг друга; это невозможно. В противном случае, без ограничения общности, все гепарды в квадрате Q стоят в одной строке с g, то есть их не больше 10.

Таким образом, мы доказали, что общее число гепардов не может превосходить $100\,000$; осталось привести пример, когда эта оценка достигается. Пронумеруем столбцы доски подряд числами $1, 2, \ldots, 1000$. Расставим гепардов на все клетки столбцов, номера которых делятся на 10. Этих гепардов будет $1000 \cdot 100 = 100\,000$, и они не будут бить друг друга.

Комментарий. Приведён лишь пример расстановки $100\,000$ гепардов, не бьющих друг друга — 2 балла.

Примеры с меньшим числом гепардов *не оцениваются.*

Доказано только, что количество гепардов не может превосходить $100\,000$ — 5 баллов.

Если эта оценка лишь сведена к доказательству того, что в любом квадрате 10×10 не более 10 гепардов — за эту часть решения ставится 2 балла вместо 5.

10.9. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

Решение. При $n > 1$ обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \qquad (*)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{2018}$. Предположим, что $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = pk$; из неравенства $(*)$ вытекает, что $k < p-1$. Так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, то $k+1 \geqslant q$; однако $k < p-1 < q-1$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел p и q подходит.

Комментарий. Замечено только, что (в предположении противного) для любого простого $p > 10^{2018}$ число $S(p)$ делится на p — 0 баллов.

В предположении противного доказано, что для любых двух последовательных простых чисел $q > p > 10^{2018}$ число $S(q)$ делится как на p, так и на q — 2 балла.

10.10. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть $\angle AFD = \alpha$. Поскольку угол BDF внешний для треугольника ADF, то $\angle BDF = \angle DAF + \angle AFD = 30^\circ + \alpha$. Также угол BFA внешний для треугольника BFC, поэтому $60^\circ + \alpha = \angle BFA = \angle FBE + \angle FCB$. Следовательно, $\angle FBE = 30^\circ + \alpha = \angle FDB$ (см. рис. 4). Тогда, так как $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$, треугольники BDF и EBF подобны. Значит, $\frac{BF}{FE} = \frac{DF}{BF}$, или $BF^2 = FD \cdot FE$. Отсюда следует, что $DF + EF \geqslant 2\sqrt{DF \cdot EF} = 2BF$.

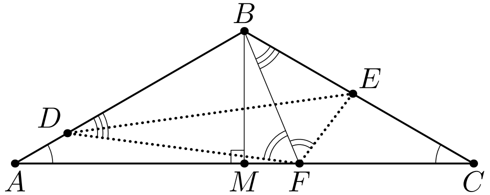

Рис. 4

По теореме косинусов для треугольника DEF имеем

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2 + DF \cdot EF} \geqslant \geqslant \sqrt{2DF \cdot EF + DF \cdot EF} = BF\sqrt{3}.$$

Следовательно, $p_1 = DF + EF + DE \geqslant (2+\sqrt{3}) \cdot BF$.

Пусть BM — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда легко видеть, что $p = (AB+BC)+AC = 4BM+2\sqrt{3}\,BM =$

$= 2(2+\sqrt{3})BM$. Осталось заметить, что $BF \geqslant BM$, поэтому $2p_1 \geqslant 2(2+\sqrt{3})BF \geqslant 2(2+\sqrt{3})BM = p$.

Комментарий. Доказано только, что $DF+EF \geqslant 2BF$ (или $DF+EF \geqslant 2BM$) — 3 балла.

Доказано только, что $DE \geqslant BF\sqrt{3}$ (или $DE \geqslant BM\sqrt{3}$) — 3 балла.

Если эти неравенства выписаны, но не доказаны (или доказаны неверно), баллы не начисляются.

Замечено только, что $p = 2(2+\sqrt{3})BM$ — 0 баллов.