7 класс

7.1. Начертите четыре луча OA, OB, OC и OD с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в 100°, 110°, 120°, 130° и 140°. Запишите, какие именно углы имеют указанные величины.

Ответ: $\angle AOD = 100°$, $\angle AOC = 110°$, $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 130°$, $\angle BOD = 140°$ (см. рис. 7.1).

Можно, например, действовать следующим образом: сначала провести лучи OA, OB и OD так, что $\angle AOB = 120°$, $\angle BOD = 140°$, $\angle AOD = 100°$. *Это возможно, так как сумма таких углов равна 360°. Затем провести луч OC между сторонами угла BOD так, чтобы* $\angle COD = 10°$, *тогда* $\angle AOC = 110°$, $\angle BOC = 130°$.

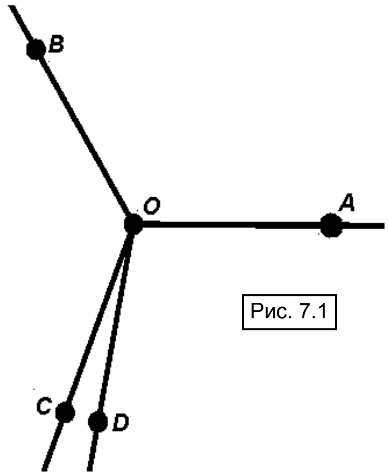

Рис. 7.1

Критерии проверки.

"+" *Приведен верный чертеж и верно записаны все требуемые углы*

"±" *Приведен верный чертеж, на котором отмечена часть требуемых углов (либо записана отдельно), а остальные углы однозначно восстанавливаются*

"∓" *Приведен правдоподобный чертеж, но по имеющимся записям требуемые углы не восстанавливаются однозначно*

"–" *Приведен неверный чертеж или он отсутствует*

7.2. Гарри, Рон и Гермиона хотели купить одинаковые непромокаемые мантии. Однако им не хватало денег: Рону – трети цены мантии, Гермионе – четверти, а Гарри – одной пятой цены мантии. Когда на распродаже цена мантии упала на 9,4 сиклей, друзья объединили свои сбережения и купили три мантии, потратив все деньги. Сколько сиклей стоила одна мантия до снижения цены?

Ответ: 36 сиклей.

Решение. Пусть сначала мантия стоила x сиклей, тогда у Рона было $\frac{2}{3}x$ сиклей, у Гермионы – $\frac{3}{4}x$ сиклей, а у Гарри – $\frac{4}{5}x$ сиклей. На распродаже мантия стоила $(x – 9,4)$ сикля, а три мантии – $3(x – 9,4)$ сиклей. Так как друзья купили три мантии, потратив все деньги, то $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x – 9,4)$. Решая это уравнение, получим: $x = 36$.

Критерии проверки.

"+" *Приведено верное обоснованное решение и получен верный ответ*

"±" *Верно и обоснованно составлено уравнение, но решение не закончено или в нем допущена вычислительная ошибка*

"∓" *Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию*

"∓" *Приведен только верный ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

7.3. Каждый из тринадцати гномов – рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Однажды все гномы по очереди сделали заявление: "Среди заявлений, сделанных ранее, ложных ровно на два больше, чем истинных". Сколько рыцарей могло быть среди гномов?

Ответ: 6.

Решение. Первые два утверждения заведомо ложные, так как до каждого из них было сделано менее двух заявлений. Третье заявление истинно, так как до него было произнесено 2 ложных заявления и ноль истинных. Четвертое заявление ложно, так как к двум ложным заявлениям добавилось одно истинное, а пятое заявление снова истинно.

Рассуждая аналогично, получим, что все гномы, делающие далее чётное утверждение, говорили ложь, а гномы, делающие нечётное утверждение, говорили правду. Таким образом, рыцарями являются гномы, выступавшие под номерами: 3, 5, 7, 9, 11 и 13.

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

"±" *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности и получен верный ответ*

"∓" *Верно указаны только номера гномов, сказавших правду, но какие-либо пояснения отсутствуют*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

7.4. На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

Ответ: 12, 3 и 1 соответственно.

Решение. Из условия задачи следует, что длина стороны каждого квадрата – натуральное число, причем длина стороны каждого квадрата является делителем длины стороны предыдущего. Пусть длина стороны маленького квадрата равна a, среднего – ka, большого – mka. Тогда $(mka)^2 + (ka)^2 + a^2 = 154 \Leftrightarrow a^2(m^2k^2 + k^2 + 1) = 154$.

Из полученного равенства следует, что 154 кратно a^2. Так как $154 = 2\cdot7\cdot11$, то оно кратно только 1^2, то есть $a = 1$. Тогда $k^2(m^2 + 1) = 153$. Следовательно, 153 делится на k^2. Учитывая, что $153 = 3^2\cdot17$ и $k > 1$, получим: $k = 3$. Подставляя найденное значение k в предыдущее равенство, получим, что $m = 4$. Таким образом, длины сторон квадратов равны: маленького – 1, среднего – 3, большого – 12.

Можно также составить уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = 154$, где a, b и c – искомые длины, найти все его натуральные решения и отобрать из них то, которое удовлетворяет условию. В этом случае, перебор должен быть полным и обоснованным, в частности, должна быть найдена и отброшена тройка (9; 8; 3).

Критерии проверки.

"+" *Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ*

"±" *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности и получен верный ответ*

"∓" *Из соображений делимости получено первое равенство, но дальнейшие выводы не верны или отсутствуют*

"∓" *Приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, либо верный ответ получен неполным перебором*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

7.5. В каждой вершине куба живёт число, не обязательно положительное. Все восемь чисел различны. Если число равно сумме трёх чисел, живущих в соседних с ним вершинах, то оно счастливо. Какое наибольшее количество счастливых чисел может жить в вершинах куба?

Ответ: 8.

Решение. См., например, рис. 7.5а. Легко проверить, что в каждой вершине куба стоит счастливое число.

Существуют и другие примеры. Разберёмся, как они устроены (от участников олимпиады этого не требовалось). Обозначим числа, стоящие в вершинах куба (см. рис. 7.5б). Запишем сначала два равенства для противоположных вершин нижнего квадрата: $a = a_1 + b + d$ (1); $c = c_1 + b + d$ (2). Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим: $a - c = a_1 - c_1$ (3).

Теперь запишем аналогичные равенства для двух вершин вертикального ребра: $b = b_1 + a + c$ (4); $b_1 = b + a_1 + c_1$ (5). Подставив b_1 из равенства (5) в равенство (4), получим: $a + c = - a_1 - c_1$ (6). Объединив равенства (3) и (6) в систему, получим, что $a = - c_1$; $c = - a_1$. Таким образом, числа, стоящие в противоположных вершинах куба должны быть противоположными (аналогичные равенства для двух других пар чисел следуют из симметрии куба).

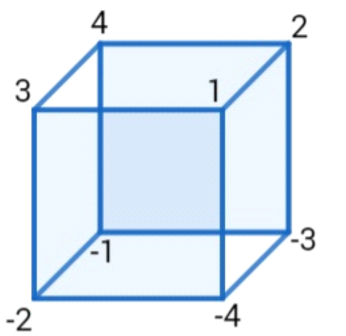

Рис. 7.5а

Следовательно, для построения любого примера достаточно выбрать одну из вершин куба и обозначить числа, живущие в соседних с ней вершинах, например, через x, y и z. Для того, чтобы выбранная вершина была счастлива, поселим в неё число $x + y + z$. Требуется только, чтобы модули чисел x, y, z и $x + y + z$ были попарно различными. Тогда останется поселить в противоположных вершинах числа $-x$, $-y$, $-z$ и $-x-y-z$ соответственно. Нетрудно убедиться, что все восемь чисел счастливы.

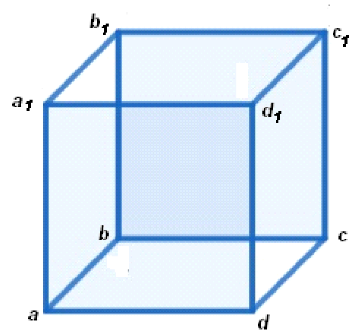

Рис. 7.5б

Критерии проверки.

"+" *Приведены верный ответ и верный пример*

"–" *Приведен только ответ*

"–" *Приведен неверный пример или он отсутствует*